Universität Bonn
Physikalisches Institut
Prof. Dr. Hans Kroha, Tim Lappe

27.06.2017
Sommersemester 2017
`http://www.kroha.uni-bonn.de`

Theoretische Physik III – Quantenmechanik
Übungsblatt 9

(Abgabe: 04.07.2017, Besprechung: 06./07.07.2017)

–Hausaufgaben–

H 9.1 Landau-Niveaus **14 Punkte**

In dieser Aufgabe betrachten wir den Effekt eines homogenen Magnetfelds auf die *orbitale* Bewegung eines elektrisch geladenen Teilchens in zwei Dimensionen. Die Bewegung sei also auf die x-y-Ebene eingeschränkt, das Magnetfeld sei senkrecht dazu orientiert: $\mathbf{B} = (0, 0, B)^T$. Der Hamilton-Operator dieses Problems hat die folgende Form:

$$\widehat{H} = \frac{1}{2m}\left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\hat{\mathbf{A}}\right)^2, \tag{1}$$

wobei $\mathbf{A}$ das Vektorpotential des magentischen Feldes ist, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, und e die Ladung des Teilchens und c die Lichtgeschwindigkeit bedeuten.

a) Zeige zunächst, dass das Vektorpotential als $\mathbf{A} = B(0, x, 0)^T$ geschrieben werden kann, und drücke den Hamilton-Operator (1) explizit durch die Vektorkomponenten aus.

b) Berechne den Kommutator $[\widehat{H}, \hat{p}_y]$. Begründe damit, warum dies auf folgenden Ansatz für die Wellenfunktionen der Energie-Eigenzustände führt: $\psi(x, y) = \phi(x)\, e^{\mathrm{i}p_y y/\hbar}$.

c) Setze den Ansatz aus b) in die zum Problem gehörige, zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung ein, $(\widehat{H} - E)\,|\psi\rangle = 0$, und bringe diese auf die Form eines harmonischen Oszillators in x-Richtung,

$$\left[\frac{1}{2m}\hat{p}_x^2 + \frac{1}{2}m\omega_c^2(x - x_0)^2\right] \phi(x) = E\,\phi(x). \tag{2}$$

Gib insbesondere das “Zentrum” x_0 des harmonischen Oszillators sowie seine Resonanzfrequenz ω_c an.

d) Wie lauten die möglichen Energien E_n des Teilchens? Hängen diese vom Impuls in der y-Richtung ab? Diese Energien heißen *Landau-Niveaus*. Welche Form haben die Eigenfunktionen $\phi_n(x, y)$?

e) Das System sei nun auf einen endlichen Streifen der Breiten L_x, L_y begrenzt. (Eine solche Anordnung heißt Quanten-Hall-Streifen). Welche Impulswerte in der y-Richtung sind nun erlaubt und warum? Mache eine Skizze der räumlichen Anordnung, in der du dir die physikalische Situation verdeutlichst. Zeichne insbesondere die räumliche Lage der Zentren $x_0(p_y)$ ein. Was ist der Entartungsgrad der Eigenzustände dieses endlich großen Systems?

f) Zusatzaufgabe (ohne Wertung): Könnte das Vektorpotential in a) auch in x-Richtung oder in radialer Richtung in der x-y-Ebene gewählt werden (Eichfreiheit)? Wie würde es dann lauten? Wie würden die Wellenfunktionen aussehen? Die Resonanzfrequenz ω_c heißt *Zyklotron-Frequenz*.

H 9.2 Eigenschaften der Pauli-Matrizen **14 Punkte**

a) Zeige, dass die Pauli-Matrizen σ_k, $k = 1, 2, 3$, und $\sigma_0 := \mathbb{1}$ eine $\mathbb{R}$-Basis (d.h. mit reellen Entwicklungskoeffizienten) der hermiteschen 2×2-Matrizen, und dass die σ_k alleine eine $\mathbb{R}$-Basis der hermiteschen spurfreien 2×2-Matrizen bilden.

b) Zeige $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij}\mathbb{1} + \mathrm{i}\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\sigma_k$. Sei $\mathbf{a} \in \mathbb{R}$ ein beliebiger Vektor im dreidimensionalen Ortsraum und $\sigma(\mathbf{a}) := \mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\sigma}$. Zeige $\sigma(\mathbf{a})\sigma(\mathbf{b}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbb{1} + \mathrm{i}\sigma(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$. Beachte hierbei, dass $\sigma(\mathbf{a}) = \mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\sigma}$ ein Skalar im Ortsraum, aber eine 2×2-Matrix im Spinraum ist. Ausdrücke der Form $\sigma(\mathbf{a})\sigma(\mathbf{b})$ beinhalten deshalb Matrixmultiplikationen.

c) Zeige $\mathrm{tr}(\sigma_k) = 0$ und $\mathrm{tr}(\sigma_i\sigma_j) = 2\delta_{ij}$.

d) Zeige mit Hilfe von b): $[\sigma_m, \sigma_n] = 2\mathrm{i}\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{mnk}\sigma_k$. Welche Transformationen der σ_k sind erlaubt, damit diese Kommutator-Relationen unverändert und die σ_k hermitesch bleiben?

e) Zeige durch Entwicklung der Exponentialfunktion: $\exp(-\mathrm{i}\sigma(\boldsymbol{\omega})) = \mathbb{1}\cos|\boldsymbol{\omega}| - \mathrm{i}\sigma(\frac{\boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|})\sin|\boldsymbol{\omega}|$.

H 9.3 Elektronenspin im Magnetfeld **12 Punkte**

Wir lassen nun die *orbitale* Bewegung eines Elektrons außer Acht und betrachten nur die Zeitabhängigkeit seines Spin-Freiheitsgrades im Magnetfeld $\mathbf{B} = B_0\hat{\mathbf{e}}_z$. Der Hamilton-Operator hierfür lautet

$$\hat{H} = 2\frac{\mu_B}{\hbar}\hat{\mathbf{S}}\cdot\mathbf{B},$$

mit dem Bohrschen Magneton $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$ und dem Spinoperator $\hat{\mathbf{S}} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$. Der Vektor $\boldsymbol{\sigma}$ ist der Vektor der Pauli-Matrizen.

a) Zeige, dass die Zeitabhängigkeiten der Erwartungswerte gegeben sind durch

$$\begin{aligned} \langle S_x\rangle_t &= \langle S_x\rangle_{t=0}\cos 2\omega_L t - \langle S_y\rangle_{t=0}\sin 2\omega_L t \\ \langle S_y\rangle_t &= \langle S_x\rangle_{t=0}\sin 2\omega_L t + \langle S_y\rangle_{t=0}\cos 2\omega_L t \end{aligned}$$

sowie $\langle S_z\rangle_t = \langle S_z\rangle_{t=0}$, wobei $\omega_L = \frac{\mu_B}{\hbar}B_0$ die Larmor-Frequenz des Elektrons ist.

Hinweis: Es ist nützlich, den Zeitentwicklungsoperator als Spezialfall des Ergebnisses von H 9.2 e) zu erkennen und dann auf die Spinoperatoren im Heisenberg-Bild anzuwenden.

Das Elektron sei nun zusätzlich zum Feld $\mathbf{B}$ einem Wechselfeld $\mathbf{B}_1 = B_1(\cos(\omega t)\hat{\mathbf{e}}_x - \sin(\omega t)\hat{\mathbf{e}}_y)$ ausgesetzt. Das Elektron befinde sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im S_z-Eigenzustand $|{\uparrow}\rangle = (1, 0)^T$.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit $w_\downarrow(t)$ befindet sich das Elektron zu einem späteren Zeitpunkt t im Zustand $|{\downarrow}\rangle = (0, 1)^T$?

Hinweis: Betrachte die Schrödinger-Gleichung für den allgemeinen Zustand

$$|\Psi(t)\rangle = (\varphi_\uparrow(t), \varphi_\downarrow(t))^T$$

und leite eine Gleichung für $\ddot{\varphi}_\downarrow(t)$ her. Bestimme dann $\varphi_\downarrow(t)$ und damit $w_\downarrow(t) = |\langle\downarrow|\Psi(t)\rangle|^2$.