Universität Bonn
Physikalisches Institut
Prof. Dr. Hans Kroha, Tim Lappe

20.06.2017
Sommersemester 2017
`http://www.kroha.uni-bonn.de`

Theoretische Physik III – Quantenmechanik
Übungsblatt 8

(Abgabe: 27.06.2017, Besprechung: 29./30.06.2017)

–Hausaufgaben–

H 8.1 Neutrino-Oszillationen **14 Punkte**

Neutrinos kommen in verschiedenen Sorten vor. Betrachte ein System aus zwei Zuständen $|\nu_n\rangle$, $n = 1, 2$, welche Eigenzustände eines freien (nicht-wechselwirkenden) Hamilton-Operators mit den Energien E_n sind und sich daher gemäß $|\nu_n\rangle(t) = e^{-iE_nt/\hbar}|\nu_n\rangle(t = 0)$ in der Zeit entwickeln. Diese Zustände sollen die Zustände zweier sich frei im Raum bewegender Neutrinosorten repräsentieren. Da die Energie freier Teilchen mit gleichem Impuls allein durch ihre Ruhemasse m_α bestimmt ist, werden diese Zustände auch *Masseneigenzustände* genannt. Erzeugt bzw. nachgewiesen werden Neutrinos jedoch nur aufgrund der schwachen Wechselwirkung, also als Eigenzustände eines *wechselwirkenden* Hamilton-Operators. Diese Zustände sind somit verschieden von den Masseneigenzuständen. Sie werden *Flavoreigenzustände* $|\tilde{\nu}_\alpha\rangle$, $\alpha = 1, 2$, genannt (z.B. Elektron-Neutrino oder Muon-Neutrino). Flavor- und Masseneigenzustände sind folglich durch eine unitäre Transformation miteinander verbunden: $|\tilde{\nu}_\alpha\rangle = \sum_{n=1,2} U_{\alpha,n}|\nu_n\rangle$.

a) Zeige, dass die Matrix jeder unitären Transformation in zwei Dimensionen geschrieben werden kann als
$$U = \begin{pmatrix} e^{i(\delta+\varphi)}\cos\vartheta & i\,e^{i(\delta-\varphi)}\sin\vartheta \\ i\,e^{-i(\delta-\varphi)}\sin\vartheta & e^{-i(\delta+\varphi)}\cos\vartheta \end{pmatrix}$$
mit $\delta, \varphi, \vartheta \in \mathbb{R}$. Zeige weiterhin, dass in der Transformation oben U einfach als Drehung um den Winkel ϑ geschrieben werden kann, indem du die Phasenfaktoren geschickt in die Zustände $|\nu_n\rangle$ und $|\tilde{\nu}_\alpha\rangle$ absorbierst.

b) Zur Zeit $t = 0$ werde ein Neutrino $|\tilde{\nu}_\alpha\rangle$ erzeugt. Zeige, dass die Wahrscheinlichkeit, zur Zeit $t > 0$ einen anderen Flavorzustand $|\tilde{\nu}_\beta\rangle$, $\beta \neq \alpha$, zu messen, gegeben ist durch
$$P_{\alpha\to\beta}(t) = |\langle\tilde{\nu}_\beta(t)|\tilde{\nu}_\alpha(t)\rangle|^2 = \sin^2(2\vartheta)\,\sin^2((E_1 - E_2)t/2\hbar)\,.$$

c) Die Energien genügen der relativistischen Dispersionsrelation $E_n^2 = p_n^2 + m_n^2c^4$. Nimm $m_nc \ll p_n$ an und setze daher $p_n = p$, wobei p der Anfangsimpuls des erzeugten Neutrinos ist. Entwickle die Energien E_n bis zur führenden Ordnung, in der $E_1 - E_2$ nicht verschwindet, und zeige so, dass die $|\tilde{\nu}_\beta\rangle$ –Nachweiswahrscheinlichkeit als Funktion des Abstands L zwischen Quelle und Detektor oszilliert[1]:
$$P_{\alpha\to\beta}(L) = \sin^2 2\vartheta\,\sin^2\left(\frac{(m_1^2 - m_2^2)c^3L}{4\hbar E}\right)$$
Gib die Wellenlänge der Neutrino-Oszillationen an. Diskutiere die Möglichkeiten und Einschränkungen, mit diesem Effekt die sehr kleinen Neutrino-Massen zu messen.

[1] *Anmerkung:* Die Rechnung zeigt, dass zeitliche Oszillationen der Wahrscheinlichkeit immer auftreten, wenn ein Zwei-Zustandssystem anfänglich in einem Zustand präpariert wird, der nicht Eigenzustand des Hamilton-Operators ist. In der Atomphysik werden sie *Rabi-Oszillationen* genannt.

H 8.2 Ehrenfest-Theorem und harmonischer Oszillator **14 Punkte**

a) Zeige im *Schrödinger-Bild*, dass der Erwartungswert eines beliebigen, explizit zeitabhängigen Operators $\hat{A}(t)$ die Relation

$$\frac{d}{dt}\langle \hat{A}(t)\rangle_\psi = -\tfrac{i}{\hbar}\langle[\hat{A}(t),\hat{H}]\rangle_\psi + \left\langle \frac{\partial \hat{A}(t)}{\partial t}\right\rangle_\psi \tag{1}$$

erfüllt, wobei $\langle \hat{A}(t)\rangle_\psi = \langle\psi|\,\hat{A}(t)\,|\psi\rangle$ den Erwartungswert von $\hat{A}(t)$ im Zustand $|\psi\rangle$ bezeichnet. An welche Gleichung aus der klassischen Mechanik erinnert das Ergebnis?

b) Wann ist der Erwartungswert eines nicht explizit zeitabhängigen Operators $\hat{A}$ konstant?

c) Wie lässt sich Gl. (1) im Heisenberg-Bild herleiten?

d) Folgere aus a) die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{\mathbf{x}}\rangle_\psi = \frac{1}{m}\langle\hat{\mathbf{p}}\rangle_\psi \qquad \text{und} \qquad \frac{d}{dt}\langle\hat{\mathbf{p}}\rangle_\psi = -\langle\nabla V(\mathbf{x})\rangle_\psi$$

für einen Hamiltonoperator $H = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(\mathbf{x})$. Interpretiere diese Gleichungen. Zeige, dass im Allgemeinen $\langle V(\mathbf{x})\rangle_\psi \neq V(\langle\mathbf{x}\rangle_\psi)$.

e) Wir betrachten jetzt speziell den harmonischen Oszillator in einer Dimension mit

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2.$$

Leite die Bewegungsgleichungen der Erwartungswerte $\langle\hat{x}\rangle_\psi$ und $\langle\hat{p}\rangle_\psi$ her und zeige, dass diese identisch mit den klassischen Bewegungsgleichungen sind. Welche Bedingung muss also ein allgemeines Potential $V(x)$ erfüllen, damit die klassischen Bewegungsgleichungen näherungsweise gelten (klassischer Grenzfall)?

H 8.3 Drehimpuls-Operator **12 Punkte**

Der Drehimpulsoperator ist analog zum klassischen Drehimpuls definiert als

$$\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{p}}\ .$$

Seine Komponenten sind also gegeben durch $\hat{L}_i = \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk}\hat{x}_j\hat{p}_k$, mit dem total antisymmetrischen Einheitstensor dritter Stufe ε_{ijk}.

a) Beweise die folgenden Identitäten ($i,\ j,\ k\ =\ 1,\ 2,\ 3$):

$$[\hat{L}_i,\hat{L}_j] = i\hbar\sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk}\,\hat{L}_k, \qquad [\hat{\mathbf{L}}^2,\hat{L}_i] = 0, \qquad [\hat{\mathbf{p}}^2,\hat{L}_i] = 0, \qquad [\hat{\mathbf{x}}^2,\hat{L}_i] = 0.$$

Hinweis: Zeige und benutze $\sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\,\delta_{kn} - \delta_{jn}\,\delta_{km}$.

b) Folgere daraus, dass in einem System mit rotationssymmetrischem Potential, also $V(\hat{\mathbf{x}}) = V(\hat{x})$, $\hat{x} = |\hat{\mathbf{x}}|$, der Drehimpuls eine Erhaltungsgröße ist.