Universität Bonn
Physikalisches Institut
Prof. Dr. Hans Kroha, Tim Lappe

13.06.2017
Sommersemester 2017
http://www.kroha.uni-bonn.de

Theoretische Physik III – Quantenmechanik
Übungsblatt 7

(Abgabe: 20.06.2017, Besprechung: 22./23.06.2017)

–Hausaufgaben–

H 7.1 Klassischer Grenzfall und Quantenfluktuationen — 15 Punkte

Die Wirkung für die Bewegung eines Teilchens der Masse m in einem Potential $V(x)$ in einer Raumdimension ist

$$S\{x(t)\} = \int \mathrm{d}t \, \left[\frac{m}{2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 - V(x)\right].$$

Der Propagator in der Pfadintegral-Formulierung ist dann wie in der Vorlesung definiert als

$$U(x,t;\ x',0) = \int \mathcal{D}\{x(t)\}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}S\{x(t)\}/\hbar}\ ,$$

D.h. die Wirkung in Einheiten von $\hbar$, $S\{x(t)\}/\hbar$ tritt als Phasenfaktor auf, mit dem der Pfad $x(t)$ im Pfadintegral gewichtet wird. Verschiedene Pfade interferieren dann konstruktiv, wenn sie (annähernd) dieselbe Phase haben. Dies trifft für die klassische Trajektorie $x_{cl}(t)$ zu, weil diese durch eine stationäre Wirkung $\delta S = 0$, d.h. stationäre Phase, charakterisiert ist.

a) Zeige durch Variation der Wirkung, $\delta S\{x(t)\}|_{x(t)=x_{\mathrm{cl}}(t)} = 0$, dass dieser klassische Pfad $x_{\mathrm{cl}}(t)$ die *Euler-Lagrange-Gleichung*, bzw. die Newtonsche Bewegungsgleichung erfüllt (Wiederholung aus der klassischen Mechanik).

b) Variiere die Wirkung in zweiter Ordnung in der Abweichung vom klassischen Pfad und zeige

$$S\{x(t)\} = S\{x_{\mathrm{cl}}(t) + \delta x(t)\} \approx S\{x_{\mathrm{cl}}(t)\} + \frac{1}{2}\int \mathrm{d}t\mathrm{d}t'\ \delta x(t')\ \left.\frac{\delta^2 S\{x(t)\}}{\delta x(t)\delta x(t')}\right|_{x(t)=x_{\mathrm{cl}}(t)} \delta x(t),$$

c) Berechne diese zweite Variation $\delta^2 S\{x(t)\}$ um den klassischen Pfad für die oben gegebene Wirkung. Zeige insbesondere, dass die kinetische Energie hierzu keinen Beitrag macht. Welche Bedingung muss $\delta^2 S$ erfüllen, damit das Pfadintegral konvergiert?

Hinweis: Verwende ohne Herleitung die funktionale Identität

$$\frac{\delta F\{x(t)\}}{\delta x(t')} = \delta(t-t')\frac{\delta F\{x(t)\}}{\delta x(t)}.$$

d) Berechne nun den Propagator $U(x,t;\ x',0)$ in der durch b), c) definierten Näherung (so genannte Gaußsche Näherung). Beachte, dass dies nur ein Produkt aus N einfachen Gaußschen Integralen ist. Bestimme den Normierungsfaktor dieses Pfadintegrals so, dass es unabhängig von der Zahl N der infinitesimalen Zeitschritte ist.

H 7.2 Quanteninterferenz im Pfadintegral-Formalismus **10 Punkte**

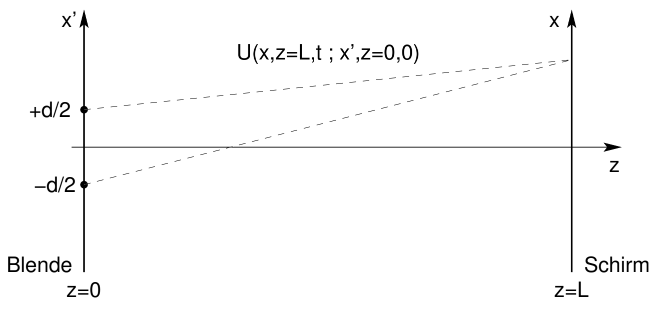
Wir untersuchen die quantenmechanische Interferenz von Teilchen, die zur Zeit $t' = 0$ von zwei parallelen, spaltförmigen Quellen ausgehen, frei im Raum propagieren, und deren Aufenthaltswahrschenlichkeit zu einer Zeit t auf einem Schirm gemessen wird. Die beiden Spalte liegen in der $x - y-$Ebene bei $z = 0$ parallel zur $y-$Achse bei $x' = \pm d/2$. Der Schirm befindet sich bei $z = L$ parallel zur $x - y-$Ebene (siehe Abb.). Die Situation ist analog zu einem Doppelspalt-Experiment, unterscheidet sich hiervon aber durch die zeitabhängige Propagation, während das Doppelspalt-Experiment i.A. stationär betrachtet wird. Wegen der Translationssymmetrie in $y-$Richtung muss diese nicht betrachtet werden.
Der *freie Propagator* in einer Raumdimension ist aus der Vorlesung bekannt:

$$U(x,t;x',0) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar t}} \exp\left\{\frac{im}{2\hbar t}(x-x')^2\right\}. \tag{1}$$

a) Gib den Propagator $U(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',0)$, $\mathbf{r} = (x,z)$, $\mathbf{r}' = (x',z')$ an, indem du die Additivität der kinetischen Energie in der $x-$ und $z-$Richtung benutzt.

b) Wie oben angegeben hat das Teilchen zum Zeitpunkt $t' = 0$ die Wellenfunktion $\psi(\mathbf{r}') = 1/2\,[\delta(x-d/2)+\delta(x+d/2)]\,\delta(z)$. Berechne die Wellenfunktion des Teilchens $\psi(\mathbf{r},t)$ zu einer beliebigen Zeit t im gesamten Raum und gib seine Aufenthaltswahrscheinlichkeitsverteilung zur Zeit t auf dem Schirm bei $z = L$ an.

c) Wenn das Teilchen einen festen Impulsbetrag $p = 2\pi\hbar/\lambda$ hätte und $L \gg d$, x, so würde es klassisch den Schirm nach einer bestimmten Zeit t erreichen. Berechne diese Zeit und zeige, dass dann zur Zeit t das bekannte Interferenzmuster des Doppelspalt-Experiments entstehen würde. Warum wird dies durch die oben beschriebene Anordnung nicht realisiert?



H 7.3 Doppelspaltexperiment **15 Punkte**

Wir betrachten die Anordnung wie in Aufgabe H 7.2 beschrieben, untersuchen nun jedoch die Situation, dass ein Teilchenstrahl mit fester Wellenlänge λ und Impuls $p = \hbar k = 2\pi/\lambda$ in $z-$Richtung von links auf die Doppelspalte strifft. Die Anfangsbedingung zum Zeitpunkt $t' = 0$ ist also eine rechtslaufende, ebene Welle $\psi((x',z'),0) = \mathrm{e}^{ikz'}/\sqrt{2\pi}$, und die Zeit t'', zu der ein Teilchen durch den Doppelspalt läuft, ist nicht festgelegt.

a) Zeige ausgehend von der Definition des Propagators als Vielfachintegral über die Ortskoordinaten $\vec{r}_i$ zu Zeiten t_i, dass der Propagator allgemein die folgende Multiplikationseigenschaft besitzt:

$$U(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',0) = \int dr'' U(\mathbf{r},t;\mathbf{r}'',t'')U(\mathbf{r}'',t'';\mathbf{r}',0) \ ,$$

wobei t'' eine beliebige Zeit mit $0 \le t'' \le t$ ist und das Inegral über den Ort in der jeweils betrachteten Raumdimension läuft.

b) Wir nehmen an, daß sich ein Elektron zum Zeitpunkt $t' = 0$ bei $\mathbf{r}' = (x', z')$ befindet und zum Zeitpunkt t auf den Schirm bei $\mathbf{r} = (x, L)$ trifft, wobei x die Auslenkung auf dem Schirm ist. Berechne mit Hilfe von a) und Gl. (1) den Propagator und zeige:

$$U(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',0) = \left(\frac{m}{2\pi \mathrm{i}\hbar}\right)^2 \int_0^t \frac{\mathrm{d}t''}{t''(t-t'')} \Big(\mathrm{e}^{\frac{im}{2\hbar t''}(z'^2+(x'-d/2)^2)} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}m}{2\hbar(t-t'')}(L^2+(x-d/2)^2)} \\ + \mathrm{e}^{\frac{im}{2\hbar t''}(z'^2+(x'+d/2)^2)} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}m}{2\hbar(t-t'')}(L^2+(x+d/2)^2)} \Big).$$

Warum muss hier über die intermediäre Zeit t'' integriert bzw. gemittelt werden?

c) Überlege und begründe, in wieweit in diesem Pfadintegral auch solche Pfade enthalten sind, auf denen die Elektronen mehrfach durch die Spalte laufen.

d) Berechne mit Hilfe der Propagatorgleichung $\psi((x, L), t) = \int \mathrm{d}x'\mathrm{d}z'\, U((x, L), t; (x', z'), 0)\cdot \psi((x', z'), 0)$ (siehe Vorlesung) und mit der ebenen Anfangswellenfunktion die Wellenfunktion auf dem Schirm zum Zeitpunkt t.
(i) Führe dazu zunächst die Integration über x' aus. Dabei tritt ein Fresnel'sches Integral (Gaußsches Integral mit imaginärem Exponenten) vom Typ $\int \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2} = (1 + \mathrm{i})\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ auf.
(ii) Führe dann die Integration über z' aus. Dabei tritt ein Fresnelsches Integral vom Typ $\int \mathrm{d}z\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(z^2+\alpha z)} = (1 + \mathrm{i})\sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha^2/4}$ auf.

e) Wir wollen $L \gg d$, x annehmen, d.h. der Schirm steht weit weg und die Auslenkung ist klein. Zeige, dass sich nach Ausführung der Ortsintegrationen ergibt:

$$\psi((x, L), t) = \frac{m}{2\pi^2 \mathrm{i}\hbar} \int_0^t \frac{\mathrm{d}t''}{t-t''} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\hbar k^2}{2m}t''} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{mL^2}{2\hbar(t-t'')}} \cos\left(\frac{m\, x\, d/2}{\hbar(t-t'')}\right).$$

Schreibe diesen Ausdruck so um, dass im Integral nur noch die Variable $\tau = t - t''$ vorkommt, d.h. die Zeit, die das Teilchen vom Spalt zum Schirm braucht.

f) Um das Zeitintegral abzuschätzen, schauen wir uns seine Struktur näher an. Der Hauptbeitrag zu Integralen solch oszillierender Funktionen kommt von den Stellen, wo die Frequenz klein wird. Wegen $L^2 \gg xd$ dominiert die zweite Exponentialfunktion den Cosinus. Zeige, dass die Frequenz daher für $t - t'' = \frac{mL}{\hbar k}$ minimal wird und interpretiere dieses Resultat physikalisch.

g) Wir ersetzen das Integral nun einfach durch den Funktionswert an der Extremalstelle aus f). Zeige, dass sich dann für die Intensitätsverteilung ergibt:

$$I = |\psi((x, L), t)|^2 \sim \frac{1}{L^2} \cdot \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi\, d\, x}{\lambda L}\right)\right].$$

Diskutiere die Faktoren dieser Formel und vergleiche mit dem Ergebnis für die Beugung von Wellen der Wellenlänge λ am Doppelspalt, siehe auch Aufg. H 7.2 c).