Universität Bonn
Physikalisches Institut
Prof. Dr. Hans Kroha, Tim Lappe

30.05.2017
Sommersemester 2017
http://www.kroha.uni-bonn.de

Theoretische Physik III – Quantenmechanik
Übungsblatt 6

(Abgabe: 13.06.2017, Besprechung: 15./16.06.2017)

–Hausaufgaben–

H 6.1 Kohärente Zustände des harmonischen Oszillators **15 Punkte**

Wir betrachten einen harmonischen Oszillator mit dem Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2})$$

und den Auf- und Absteigeoperatoren $\hat{a}^\dagger$ und $\hat{a}$.

a) Zeige zunächst, dass für jede analytische (in eine Potenzreihe entwickelbare) Funktion f gilt

$$\begin{aligned} \left[\hat{a}, f(\hat{a}^\dagger)\right] &= f'(\hat{a}^\dagger) \\ \left[\hat{a}^\dagger, f(\hat{a})\right] &= -f'(\hat{a}) \end{aligned}$$

b) Betrachte den Zustand $|\varphi_\alpha\rangle = A\,\exp(\alpha\hat{a}^\dagger)\,|0\rangle$, mit $A, \alpha \in \mathbb{C}$. Berechne $\langle n|\varphi_\alpha\rangle$, wobei $|n\rangle$ der Oszillator-Eigenzustand zum Eigenwert $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$ ist, und entwickle damit $|\varphi_\alpha\rangle$ in die Basis der Oszillator-Eigenzustände. Zeige, dass der Zustand $|\varphi_\alpha\rangle$ normiert ist, wenn $A = e^{-|\alpha|^2/2}$.

c) Zeige, dass $|\varphi_\alpha\rangle$ ein Eigenzustand des Absteigeoperators $\hat{a}$ ist, d.h. $\hat{a}\,|\varphi_\alpha\rangle = \alpha\,|\varphi_\alpha\rangle$.
Hinweis: Benutze das Ergebnis aus Teilaufgabe a) um zu zeigen, dass $\hat{a}e^{\alpha\hat{a}^\dagger} = e^{\alpha\hat{a}^\dagger}(\hat{a} + \alpha)$, und wende diese Operatoridentität auf den Grundzustand $|0\rangle$ an.

d) Berechne den Überlapp $\langle\varphi_\beta|\varphi_\alpha\rangle$ zwischen zwei kohärenten Zuständen $|\varphi_\beta\rangle$ und $|\varphi_\alpha\rangle$ und zeige, dass $|\langle\varphi_\beta|\varphi_\alpha\rangle|^2$ exponentiell abfällt für $|\alpha - \beta| \to \infty$.

e) Berechne die Erwartungswerte $\langle\hat{x}\rangle$, $\langle\hat{p}\rangle$ und $\langle\hat{n}\rangle$ sowie $\langle\hat{x}^2\rangle$ bezüglich des kohärenten Zustands als Funktion der Zeit. Benutze hierfür, dass die Zeitabhängigkeit der Zustände $|n\rangle$ bekannt ist, und stelle $\hat{x}$, $\hat{p}$, $\hat{n}$ durch Auf- und Absteiger dar.

f) Skizziere $\langle\hat{x}\rangle$, $\langle\hat{p}\rangle$ und $(\Delta x)^2 = \langle(\hat{x} - \langle\hat{x}\rangle)^2\rangle = \langle(\hat{x}^2 - \langle\hat{x}\rangle^2)\rangle$ als Funktion der Zeit und diskutiere anhand dessen, warum die $|\varphi_\alpha\rangle$ kohärente Zustände genannt werden.

H 6.2 Heisenberg-Bild **15 Punkte**

Diese Aufgabe behandelt an einem expliziten Beispiel, dass die Darstellung eines Operators im Heisenberg-Bild häufig einen schnelleren und eleganteren Lösungsweg erlaubt als in dem bislang benutzten Schrödinger-Bild.
Wir betrachten ein Teilchen mit Masse m und Ladung q, das einem konstanten elektrischen Feld E ausgesetzt ist und beschrieben wird durch den Hamilton-Operator [vgl. Aufgabe H 2.4 b)]

$$\widehat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} - qE\hat{x}. \tag{1}$$

a) Der Impulsoperator $\hat{p}$ im Schrödinger-Bild ist bekannt. Zeige mit Hilfe der Heisenberg-Bewegungsgleichung, dass der Impulsoperator im Heisenberg-Bild gegeben ist durch $\hat{p}_H(t) = \hat{p}_H(0) + qEt$.

b) Berechne analog den Ortsoperator im Heisenberg-Bild $\hat{x}_H(t)$.

c) Das Teilchen befinde sich zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ in einem Zustand, dessen Verteilung im Ortsraum durch eine Gaußsche Wellenenfunktion gegeben ist, die um den Ort $x = 0$ zentriert ist und die Standardabweichung $\Delta x(0) = \Delta x_0$ hat:

$$\Psi(x, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}\Delta x_0}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\Delta x_0}\right)^2}.$$

Der mittlere Impuls des Teilchens zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ sei null. Berechne den Ortserwartungswert $\langle \hat{x} \rangle(t)$ des Teilchens als Funktion der Zeit t. Berechne ebenso die Standardabweichungen des Ortes (Ortsunschärfe) $\Delta x(t) = \sqrt{\langle(\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle)^2\rangle}$ und des Impulses (Impulsunschärfe) $\Delta p(t) = \sqrt{\langle(\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle)^2\rangle}$ des Teilchens zu einer beliebigen Zeit t.

H 6.3 Das Ehrenfest-Theorem **10 Punkte**

a) Zeige für den Erwartungswert eines beliebigen, i.A. auch explizit zeitabhängigen Operators $A(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \langle A(t) \rangle_\psi = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar} \langle [A(t), H] \rangle_\psi + \left\langle \frac{\partial A(t)}{\partial t} \right\rangle_\psi,$$

wobei H den Hamilton-Operator und $\langle A(t) \rangle_\psi = \langle \psi | A(t) | \psi \rangle$ den Erwartungswert von $A(t)$ im Zustand $|\psi\rangle$ bezeichnet. Woran erinnert diese Gleichung?

b) Zeige, dass die Erwartungswerte eines nicht explizit zeitabhängigen Operators A genau dann zeitlich konstant sind, wenn A mit H kommutiert.

c) Folgere aus a) die Bewegungsgleichungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \langle \mathbf{p} \rangle_\psi = - \langle \nabla V \rangle_\psi \quad \text{und} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \langle \mathbf{r} \rangle_\psi = \frac{1}{m} \langle \mathbf{p} \rangle_\psi$$

für einen Hamiltonoperator $H = \frac{1}{2m}\mathbf{p}^2 + V(\mathbf{r})$. Interpretiere diese Gleichungen.

d) Gilt für ein beliebiges Potential $V(\mathbf{r})$ und einen beliebigen Zustand $|\psi\rangle$: $\langle \nabla V \rangle_\psi = \nabla V(\langle \mathbf{r} \rangle_\psi)$? Warum oder warum nicht? Gelten folglich *im Allgemeinen* für die Erwartungswerte von Ort und Impuls die klassischen Bewegungsgleichungen?