Universität Bonn
Physikalisches Institut
Prof. Dr. Hans Kroha, Tim Lappe

23.05.2017
Sommersemester 2017
`http://www.kroha.uni-bonn.de`

Theoretische Physik III – Quantenmechanik
Übungsblatt 5

(Abgabe: 30.05.2017, Besprechung: 01./02.06.2017)

–Hausaufgaben–

H 5.1 Hermite-Polynome **15 Punkte**

Die Hermite-Polynome $H_n(y)$ wurden in der Vorlesung eingeführt als die Polynome, aus denen die Eigenzustände $|n\rangle$ des harmonischen Oszillators in der Orstdarstellung aufgebaut sind, d.h.

$$\langle x|\, n\rangle = \psi_n(y) = A_n H_n(y)\, e^{-y^2/2}, \tag{1}$$

wobei $y = x/b$ und $b = \sqrt{\hbar/m\omega}$ die charakteristische Oszillatorlänge ist. A_n ist ein Normierungsfaktor, so dass die Eigenzustände auf 1 normiert sind: $\langle n|\, n\rangle = 1$. Mit Hilfe der Auf- und Absteige-Operatoren, ausgedrückt durch Orts- und Impulsoperatoren als $a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(x/b + b\, d/dx)$, $a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(x/b - b\, d/dx)$, und der Beziehungen

$$a^\dagger\, |n\rangle = \sqrt{n+1}\ |n+1\rangle\,, \tag{2}$$

$$a\, |n\rangle = \sqrt{n}\ |n-1\rangle \tag{3}$$

lassen sich elegant weitere Beziehungen und Definitionen für die Hermite-Polynome beweisen.

a) Finde den Grundzustand des harmonischen Oszillators in Ortsdarstellung $\psi_0(x)$ aus der Bedingung $a\,|0\rangle = 0$. Berechne auch den Normierungsfaktor A_0. Verwende $y = x/b$ mit $b = \sqrt{\hbar/m\omega}$.

b) Zeige, dass der Normierungsfaktor des n-ten Eigenzustands $|n\rangle$ lautet:

$$A_n = \left(\frac{1}{2^{2n}(n!)^2\pi b^2}\right)^{1/4},$$

indem du $|n\rangle$ durch wiederholte Anwendung von $a^\dagger$ erzeugst.

c) Zeige, dass für die Hermite-Polynome auch die folgende Definition gilt:

$$e^{-y^2/2} H_n(y) = \left(y - \frac{d}{dy}\right)^n e^{-y^2/2}. \tag{4}$$

d) Leite mit Hilfe der $\hat{a}^\dagger, \hat{a}$ die Rekursionsrelation der Hermite-Polynome her:

$$H_{n+1}(y) = 2yH_n(y) - 2nH_{n-1}(y)$$

e) Zeige mit Hilfe von (4): Hermite-Polynome erfüllen die *Hermitesche Differentialgleichung*

$$H_n''(y) - 2yH_n'(y) + 2nH_n(y) = 0 \qquad n = 0, 1, 2,\ \ldots$$

H 5.2 Harmonischer Oszillator **5 Punkte**

Benutze die Darstellung durch $a^\dagger$, a, um für die Eigenzustände $|n\rangle$ des eindimensionalen harmonischen Oszillators die Standardabweichung $\Delta\Omega = \sqrt{\langle n| (\Omega - \langle\Omega\rangle)^2 |n\rangle}$ für $\Omega = x,\, p$ zu berechnen. Gib auch die Unschärferelation $\Delta x \Delta p$ an. Wie verhält sich dieses Produkt für $n \to 0$ und für $n \to \infty$?

H 5.3 Harmonisch gebundenes Teilchen in einem elektrischen Feld **5 Punkte**

Wir betrachten ein Teilchen mit Ladung q und Masse m, das sich in einem eindimensionalen harmonischen Oszillator-Potential bewegt und zusätzlich einem elektrischen Feld $\mathcal{E}$ ausgesetzt ist. Der Hamilton-Operator lautet also

$$\widehat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) \qquad \text{mit} \;\; V(\hat{x}) = \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{x}^2 - q\mathcal{E}\hat{x},$$

wobei ω die Eigenfrequenz des Oszillators ist.

a) Zeige, dass sich die Lösungen dieses Problems durch die aus der Vorlesung bekannten Lösungen des eindimensionalen harmonischen Oszillators ausdrücken lassen, indem Du eine geeignete Ortskoordinate einführst.

b) Bestimme die neuen Eigenfunktionen und Energie-Eigenwerte.

c) Zeige, dass für einen bestimmten Wert des elektrischen Feldes $\mathcal{E}_0$ die Grundzustandsenergie gleich null wird. Gib $\mathcal{E}_0$ an. Bedeutet dies, dass es in diesem Fall keine Nullpunktsenergie gibt?

d) Berechne den Erwartungswert $\langle 0| \hat{x} |0\rangle$ und vergleiche ihn mit dem Erwartungswert im Fall $\mathcal{E} = 0$.

H 5.4 Anharmonischer Oszillator **5 Punkte**

Hier wollen wir einen anharmonischen Oszillator betrachten, der sich vom harmonischen Fall durch eine (kleine) Nichtlinearität unterscheidet. Der Hamilton-Operator für diesen Fall sei gegeben durch

$$\widehat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \hat{x}^2}{2} + \lambda \hat{x}^4. \tag{5}$$

a) Drücke Gl. (5) durch die Auf- und Absteigeoperatoren $\hat{a}^\dagger, \hat{a}$ aus und bringe die Operatoren in eine solche Ordnung, dass nur Produkte der Form $a^\dagger a$ auftreten. (Warum ist das nützlich?) Beachte, dass die Operatoren nicht kommutieren.

b) Nimm nun für den allgemeinen Fall $\lambda \neq 0$ an, dass das System sich näherungsweise immer noch in einem Eigenzustand $|n\rangle$ des harmonischen Systems befindet (dies wird umso eher gültig sein, je kleiner λ ist) und berechne die mittlere Energie $\langle \widehat{H} \rangle$ dieses Zustands.