Universität Bonn
Physikalisches Institut
Prof. Dr. Hans Kroha, Tim Lappe

16.05.2017
Sommersemester 2017
http://www.kroha.uni-bonn.de

Theoretische Physik III – Quantenmechanik
Übungsblatt 4

(Abgabe: 23.05.2017, Besprechung: 25./26.05.2017)

–Hausaufgaben–

H 4.1 Kommutatoren — 10 Punkte

Ein in der Quantenmechanik sehr wichtiges und auch hilfreiches Konzept ist das des Kommutators. In dieser Aufgabe soll der Umgang mit Kommutatoren geübt werden. Der Kommutator zweier Operatoren A und B wird bekanntlich mit $[A, B]$ bezeichnet und ist definiert als

$$[A, B] := AB - BA.$$

a) Beweise $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$ und ebenso $[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C$.

b) Beweise $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$ (*Jacobi-Identität*).

c) Für zwei Operatoren A und B gelte die Beziehung $[A, B] = c\mathbb{1}$, wobei $c \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl sei. Beweise durch vollständige Induktion, dass dann $[A^n, B] = cnA^{n-1}$ gilt.

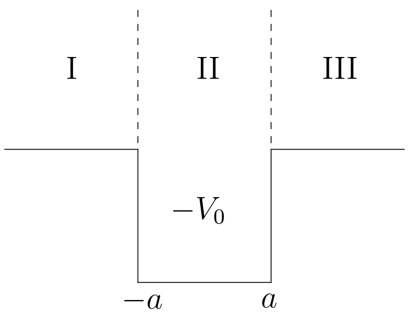
H 4.2 Streulösungen am Potentialtopf — 10 Punkte

Statt der gebundenen Lösungen für negative Energien in einem Potentialtopf wollen wir in dieser Aufgabe die sogenannten *Streulösungen* untersuchen, d. h. das Verhalten einfallender Wellen mit *positiver* Energie. Von links falle also eine Welle in positiver x-Richtung und mit Energie $E > 0$ auf folgenden Potentialtopf ein:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq a, \\ -V_0, & |x| < a, \end{cases} \quad \text{mit} \quad V_0 > 0. \tag{1}$$

a) Konstruiere die Ansätze für die Wellenfunktion in den Bereichen I, II, und III (s. Skizze unten). Bestimme die Reflexions- und Transmissionsamplituden. Wie verhält sich die Welle im Bereich II, also "über" dem Topf? Untersuche die Grenzfälle $E \gg V_0$ und $V_0 \gg E$.

b) Berechne die einfallenden, reflektierten und transmittierten Teilchenstromdichten und zeige die Teilchenstromerhaltung: $j_r + j_t = j_i$.



H 4.3 Quantenfilter **10 Punkte**

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass ein anziehendes δ-Potential genau einen gebundenen Zustand hat und damit die erlaubte Bindungsenergie auf genau einen Wert festlegt. Diese Eigenschaft kann man ausnutzen, um einen "Quantenfilter" zu konstruieren, der nur Wellen einer bestimmten Energie transmittiert.
Wir betrachten die Schrödinger-Gleichung für Teilchen der Masse m in $d = 1$ Dimension mit dem Potential

$$V(x) \;=\; V_0\,\delta(x) \;+\; V_1\,\Theta(a - |x|), \qquad \text{wobei} \quad V_0 < 0, \quad V_1 > 0.$$

Von links ($x \to -\infty$) falle eine ebene Welle mit der Energie E ein, mit $0 < E < V_1$.

a) Skizziere $V(x)$. Stelle den Ansatz für die Lösung $\Psi(x)$ in den verschiedenen Bereichen des stückweise konstanten Potentials auf und bestimme die reellen bzw. imaginären Wellenzahlen k, bzw. $i\kappa$ in den verschiedenen Bereichen. Kann κ positiv oder negativ sein?

b) Bestimme nun den Sprung der Ableitung $\partial\Psi(x)/\partial x$ am Ort des δ-Potentials und zeige, dass hierdurch die Energie der Lösung innerhalb des Potentialwalls $|x| < a$ eindeutig festgelegt ist. Gib den Wert dieser Energie E_0 an. Wie lautet κ?

c) Bestimme für diese Energie E_0 die Lösung $\Psi(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ durch Anschließen der Randbedingungen. Bestimme für diesen Fall die Transmissions- und die Reflexionsamplitude r, t, und zeige, dass $|r| = 0$ und $|t| = 1$.

d) Betrachte nun Energien $E \neq E_0$. Wie sieht nun die Lösung innerhalb des Potentialwalls ($|x| < a$) aus? [Benutze hierfür das allgemeine Ergebnis von Teilaufgabe b)].

e) Überlege, warum für $E \neq E_0$ die Ableitung $\partial\Psi(x)/\partial x$ bei $x = \pm a$ unstetig sein kann. Gib für $E \neq E_0$ die Lösung im gesamten Raumbereich sowie die Reflexions- und Transmissionsamplituden r, t an.

Anmerkung: Potentiale des hier betrachteten Typs spielen eine große Rolle bei Systemen, die *interne*, gebundene Zustände haben, und an denen *von außen* eine Materiewelle gestreut werden kann, also z.B. Atome oder Atomkerne. Die Überhöhung der Transmissionswahrscheinlichkeit, wenn die einfallende Energie gleich der eines internen gebundenen Zustands ist, heißt *Feshbach-Resonanz*.