Universität Bonn
Physikalisches Institut
Prof. Dr. Hans Kroha, Tim Lappe

09.05.2017
Sommersemester 2017
`http://www.kroha.uni-bonn.de`

Theoretische Physik III – Quantenmechanik
Übungsblatt 3

(Abgabe: 16.05.2017, Besprechung: 18./19.05.2017)

–Hausaufgaben–

H 3.1 Heterostruktur mit Störtelle **10 Punkte**

In der Elektronik werden häufig dünne, metallische Schichten verwendet, die ein Störstellen-Atom enthalten. Diese Situation kann durch einen Potentialtopf mit unendlich hohen Wänden und einem Delta-Peak als Störstellenpotential darin beschrieben werden. Um die Diskussion einfach zu halten, sei die Störstelle exakt in der Mitte platziert,

$$V(x) = \begin{cases} \lambda\delta(x), & |x| < L/2, \\ \infty, & |x| \geq L/2. \end{cases}$$

a) Warum vertauscht der Hamilton-Operator mit dem Paritätsoperator? Was folgt daraus für die Parität der Wellenfunktionen? Warum gilt $\psi(x) = 0$ für $|x| \geq L/2$?

b) Folgere aus a), dass $\psi(x)$ stückweise die Form $\psi(x) = B\cos((2n+1)\pi x/L)$ oder $\psi(x) = A\sin(2n\pi x/L)$ hat, mit $n \in \mathbb{N}$.

c) Warum kann $\psi(x)$ als stetig angenommen werden? Zeige durch Integration der Schrödinger-Gleichung in der Umgebung von $x = 0$, dass $\psi'(0)$ um $2m\lambda\psi(0)\hbar^{-2}$ springt. Zeige, dass diese Bedingung nur die ungeraden Lösungen erlaubt.

d) Warum vereinfacht die Platzierung der Störstelle in der Mitte das Problem?

H 3.2 Stationäre Zustände im eindimensionalen Potentialtopf **15 Punkte**

Wir suchen stationäre Lösungen $\psi(x,t) = \exp(-iEt/\hbar)\varphi(x)$ der eindimensionalen Schrödinger-Gleichung zur Energie E für einen asymmetrischen Potentialtopf, d. h.

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x < -a, \\ V_0, & |x| \leq a, \\ V_1, & x > a, \end{cases}$$

wobei $V_0 < 0$, $V_1 \geq 0$. Die Wellenfunktion $\varphi(x)$ ist somit überall stetig differenzierbar (warum?).

a) Zeige: Damit eine auf 1 normierbare Lösung existiert, muss $E < 0$ sein, und es muss gelten (A, $B \in \mathbb{C}$):

$$\varphi(x) = \begin{cases} Ae^{\lambda x}, & x < -a, \\ Be^{-\Lambda x}, & x \geq a, \end{cases} \quad \text{mit } \lambda = \sqrt{2m\,|E|\,/\hbar^2},\ \Lambda = \sqrt{2m\,|E - V_1|\,/\hbar^2}.$$

b) Zeige, dass für $|x| < a$ gilt:

$$\varphi(x) = \alpha e^{\lambda' x} + \beta e^{-\lambda' x},\ \alpha, \beta \in \mathbb{C},\ \lambda' = \begin{cases} \sqrt{2m\,|E - V_0|\,/\hbar^2}, & E - V_0 < 0, \\ i\sqrt{2m\,(E - V_0)\,/\hbar^2}, & E - V_0 > 0. \end{cases}$$

c) Zeige, dass $\varphi(x)$ genau dann stetig differenzierbar ist, wenn

$$\begin{aligned} Ae^{-\lambda a} &= \alpha e^{-\lambda' a} + \beta e^{\lambda' a} \\ Be^{-\Lambda a} &= \alpha e^{\lambda' a} + \beta e^{-\lambda' a} \\ 0 &= \begin{pmatrix} (1 - \lambda'/\lambda)\, e^{-\lambda' a} & (1 + \lambda'/\lambda)\, e^{\lambda' a} \\ (1 + \lambda'/\Lambda)\, e^{\lambda' a} & (1 - \lambda'/\Lambda)\, e^{-\lambda' a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Folgere, dass die Determinante der obigen 2×2-Matrix verschwinden muss, damit eine nicht-triviale Lösung vorliegt. Leite hieraus eine Gleichung für E ab und zeige damit, dass $E - V_0 > 0$ sein muss und dass nur für endlich viele Werte von E eine normierbare Lösung existiert.

Wir betrachten nun den symmetrischen Fall, $V_1 = 0$. Wie sich zeigen wird, existieren wegen der Symmetrie des Problems immer Lösungen.

d) Gib mittels c) die vollständige Lösung an, indem du A, B und β durch α ausgedrückst.

e) Haben die Lösungen eine wohldefinierte Parität, d.h. gilt $\varphi(-x) = \pm\varphi(x)$? Hätte man dieses Ergebnis auch von vornherein erwarten können?

f) Zeige: für einen sehr flachen Topf ($|V_0| \ll \hbar^2/ma^2$) ist $E \approx -2ma^2V_0^2/\hbar^2$ die einzige Lösung von c). Welche Parität hat die zugehörige Wellenfunktion? Diskutiere die möglichen Energien für einen sehr tiefen Topf.

g) Gib eine Bedinung für a in Abhängigkeit von V_0 und V_1 an, so dass für $V_1 > 0$, d. h. im asymmetrischen Fall, gar keine Lösung existiert.

H 3.3 Tunneleffekt — 15 Punkte

Aufgrund der stetigen Differenzierbarkeit der Wellenfunktion kann sich ein Teilchen mit nicht verschwindender Wahrscheinlichkeit auch in Raumbereichen aufhalten kann, die klassisch aus energetischen Gründen nicht erlaubt sind. Hieraus ergibt sich, dass Teilchen durch Potentialbarrieren transmittiert werden können, obwohl dies klassisch verboten ist. Dieser Effekt heißt *Tunneleffekt*. Dieser soll am Beispiel einer eindimensionalen, rechteckigen Potentialbarriere untersucht werden. Betrachte also das Potential

$$V(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq a, \\ V_0, & |x| < a, \end{cases} \quad \text{mit} \quad V_0 > 0.$$

a) Setze $\psi(x,t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\varphi(x)$. Zeige, dass die Lösung für $0 < E < V_0$ folgende allgemeine Form hat:

$$\varphi(x) = \begin{cases} Ae^{\mathrm{i}kx} + Be^{-\mathrm{i}kx}, & x \leq a, \\ Ce^{-\kappa x} + De^{\kappa x}, & |x| < a, \\ Fe^{ikx} + Ge^{-ikx}, & x \geq a, \end{cases} \qquad \text{mit} \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \quad \kappa = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}.$$

Skizziere das Potential $V(x)$ sowie die sechs oben angegebenen Teile der Wellenfunktion. Welche davon sind einlaufende Wellen, welche sind auslaufende Wellen?

b) Zeige, dass die Bedingung stetiger Differenzierbarkeit von $\varphi(x)$ sich in folgender Weise ausdrücken lässt:

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = M(a) \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} = M(-a) \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix},$$

wobei $M(a)$ die folgende Matrix ist:

$$M(a) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{\mathrm{i}\kappa}{k}\right) e^{\kappa a + \mathrm{i}ka} & \left(1 - \frac{\mathrm{i}\kappa}{k}\right) e^{-\kappa a + \mathrm{i}ka} \\ \left(1 - \frac{\mathrm{i}\kappa}{k}\right) e^{\kappa a - \mathrm{i}ka} & \left(1 + \frac{\mathrm{i}\kappa}{k}\right) e^{-\kappa a - \mathrm{i}ka} \end{pmatrix}.$$

c) Folgere aus b) folgende Beziehung, wobei $\varepsilon = \frac{\kappa}{k} - \frac{k}{\kappa}$ und $\eta = \frac{\kappa}{k} + \frac{k}{\kappa}$:

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\cosh 2\kappa a + \frac{\mathrm{i}\varepsilon}{2} \sinh 2\kappa a) e^{2\mathrm{i}ka} & \frac{\mathrm{i}\eta}{2} \sinh 2\kappa a \\ -\frac{\mathrm{i}\eta}{2} \sinh 2\kappa a & (\cosh 2\kappa a - \frac{\mathrm{i}\varepsilon}{2} \sinh 2\kappa a) e^{-2\mathrm{i}ka} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}.$$

Nun falle ein Teilchenstrahl allein von links (d.h. von $x \to -\infty$) auf die Potentialbarriere ein.

d) Warum ist dann der Koeffizient $G = 0$? Motiviere die Bezeichnung *Transmissionsamplitude* für $T(E) = F/A$ sowie *Transmissionswahrscheinlichkeit* oder *Transmissionskoeffizient* für $|T(E)|^2$. Wie lauten demnach die Definitionen der *Reflexionsamplitude* $R(E)$ und des *Reflexionskoeffizienten*?

e) Zeige für den Transmissionskoeffizienten

$$1/|T(E)|^2 = 1 + \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{4}\right) \sinh^2 2\kappa a.$$

Skizziere $|T(E)|^2$ und interpretiere das Ergebnis physikalisch.

f) Zeige $|T(E)|^2 + |R(E)|^2 = 1$ und diskutiere diese Identität.

g) Zeige für eine breite und hohe Potentialbarriere (d.h. $\kappa a \gg 1$), dass

$$|T(E)|^2 \approx e^{-\frac{4a}{\hbar}\sqrt{2m(V_0 - E)}}.$$

Nutze $\sinh x \approx e^x/2 \gg 1$ ($x \gg 1$) und vernachlässige $\ln x$ gegenüber $\sqrt{x}$ ($x \gg 0$). Das wichtige Resultat ist hier $|T(E)| \sim \exp\left(-\text{Potentialbreite} \cdot \sqrt{\text{Potentialhöhe}}\right)$.