Universität Bonn
Physikalisches Institut
Prof. Dr. Hans Kroha, Tim Lappe

02.05.2017
Sommersemester 2017
http://www.kroha.uni-bonn.de

Theoretische Physik III – Quantenmechanik
Übungsblatt 2

(Abgabe: 09.05.2017, Besprechung: 11./12.05.2017)

–Hausaufgaben–

H 2.1 Gauß'sche Wellenpakete — 12 Punkte

Ein *Gauß'sches Wellenpaket* wird beschrieben durch

$$g(x,t) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\; g(k) e^{ikx - i\omega(k)t}, \tag{1}$$

wobei $g(k) = e^{-\frac{1}{4}a^2(k-k_0)^2}$ und $\omega(k) = \hbar k^2/2m$.

a) Berechne zunächst $g(x,0)$ und gib die Standardabweichung Δx von $|g(x,0)|^2$ an. Formuliere damit die Unschärferelation zwischen Δx und Δk zum Zeitpunkt $t = 0$.

b) Zeige, dass $g(x,t)$ eine Lösung der Schrödinger-Gleichung ist.

c) Berechne die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens am Ort x zur Zeit t, zeige also die Identität

$$|g(x,t)|^2 = \frac{2}{a^2} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\hbar t}{ma}\right)^2}} \exp\left\{ -\frac{2\,(x - \hbar k_0 t/m)^2}{a^2 + \left(\frac{2\hbar t}{ma}\right)^2} \right\}. \tag{2}$$

Wie entwickelt sich die Standardabweichung Δx in der Zeit? Mit Δk aus a) lässt sich hieraus eine Unschärferelation zur Zeit t bilden. Wie verhält sich also das Wellenpaket in der Zeit? Skizziere das Wellenpaket für zwei verschiedene Zeiten, $t = 0$ und $t > 0$.

H 2.2 Lineare Algebra: Basistransformation — 10 Punkte

Bezüglich einer Basis $\mathcal{A} = \{|v_1\rangle, \dots, |v_N\rangle\}$ des Vektorraums V besitze der Ket-Vektor $|u\rangle \in V$ die Basisdarstellung $|u\rangle = \sum_k x_k |v_k\rangle$, wobei $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)^T$ der Koordinatenvektor bezüglich der Basis $\mathcal{A}$ ist. Bezüglich einer anderen Basis $\mathcal{B} = \{|w_1\rangle, \dots, |w_N\rangle\}$ besitzt $|u\rangle \in V$ die Basisdarstellung $|u\rangle = \sum_k y_k |w_k\rangle$, mit dem Koordinatenvektor $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)^T$. Im Folgenden seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Orthonormalbasen.

a) Bestimme die Transformationsmatrix U^{-1} der Koordinatenvektoren mit $\mathbf{y} = U^{-1}\mathbf{x}$ und drücke die Matrixelemente durch Skalarprodukte aus.
Hinweis: Betrachte zunächst die Basisvektoren $\{|v_i\rangle\}$ in der neuen Basis der $\{|w_j\rangle\}$.

b) Bestimme nun die Transformationsmatrix U, für die gilt:

$$\mathbf{x} = U\mathbf{y}. \tag{3}$$

c) Die Matrizen $A = M_\mathcal{A}$ und $B = M_\mathcal{B}$ seien die Basisdarstellungen einer linearen Abbildung M in den beiden Basen $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{B}$. Zeige, dass

$$B = U^{-1}AU. \tag{4}$$

d) Sei V ein zweidimensionaler, reeller Vektorraum und $\mathcal{A} = \{|e_1\rangle, |e_2\rangle\}$ eine Orthonormalbasis von V, d.h. $\langle e_i|e_j\rangle = \delta_{ij}$, mit der Koordinatendarstellung

$$\hat{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Sei eine Matrix in dieser Basis gegeben durch $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$. Zeige, dass $\mathcal{B} = \{|e_1'\rangle, |e_2'\rangle$ mit der Basisdarstellung bezüglich der Basis $\mathcal{A}$,

$$\hat{e}_1' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \hat{e}_2' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

ebenfalls eine Orthonormalbasis ist, und bestimme anschließend die Transformationsmatrix U sowie die transformierte Matrix $B = U^{-1}AU$.

H 2.3 Lineare Algebra: Eigenwertproblem — 8 Punkte

Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$ heißt bekanntlich *hermitesch* oder *selbstadjungiert*, falls $A^\dagger = A$.

a) Beweise die folgenden Beziehungen für die hermiteschen, linearen Abbildungen A, B und eine komplexe Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$(A+B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger, \quad (AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger, \quad (\lambda A)^\dagger = \lambda^* A^\dagger \quad \text{und} \quad \left(A^\dagger\right)^\dagger = A. \tag{7}$$

Die Beziehungen können in basisfreier Form durch die Wirkung der Abbildungen im dualen Raum oder (wegen der Isomorphie zwischen dem Vektorraum und dem Koordinatenraum bezüglich einer Basis) in der entsprechenden Basisdarstellung (Matrizen) gezeigt werden. Häufig identifiziert man eine lineare Abbildung mit ihrer Matrix in einer gegebenen Koordinatendarstellung.

b) Es gelte für die Abbildung $A : V \to V$ und einen Vektor $|v\rangle \in V$ mit $|v\rangle \neq 0$ die Beziehung

$$A|v\rangle = \lambda|v\rangle \;. \tag{8}$$

Zeige, dass die Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{C}$ von A gegeben sind als die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\det(A - \lambda\mathbb{1})$, wobei $\mathbb{1}$ die Einheitsmatrix ist.
Hinweis: Eine Matrix ist nicht invertierbar, falls ihre Determinante gleich null ist.

c) Zeige, dass die Eigenwerte einer Abbildung A unabhängig von der Wahl der Basis sind.

d) Zeige, dass eine hermitesche Abbildung A nur reelle Eigenwerte besitzt und dass Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten orthogonal sind.

H 2.4 Gleichförmige und beschleunigte Bewegung eines Teilchens **10 Punkte**

In dieser Aufgabe zeigen wir zunächst, dass die Schrödinger-Gleichung invariant unter Galilei-Tranformationen ist. Anschließend betrachten wir die Bewegung eines geladenen Teilchens in einem konstanten elektrischen Feld.

a) Die Galilei-Transformation von einem Inertialsystem S' in ein Inertialsystem S, das sich gegenüber S' mit der konstanten Geschwindigkeit v bewegt, ist gegeben durch $x(t) = x' - vt'$ und $t = t'$. Sei nun $\varphi(x', t')$ eine Lösung der freien Schrödinger-Gleichung im System S', d.h. in den Koordinaten (x', t'). Zeige, dass dann

$$\psi(x,t) = e^{i\alpha(x(t),t)} \varphi(x(t), t) \tag{9}$$

eine Lösung der freien Schrödinger-Gleichung in den Koordinaten (x, t) ist, indem du die Phase $\alpha(x(t), t)$ passend bestimmst.

b) Ein Teilchen mit Ladung q bewege sich in einem konstanten elektrischen Feld E. Mit dem entsprechenden Potential $V = -qEr$ lautet die Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x,t) - qEx\, \psi(x,t). \tag{10}$$

Mache den Ansatz

$$\psi(x,t) = e^{i\lambda(x,t)} \varphi \left(x - \frac{qE}{2m} t^2, t \right), \tag{11}$$

wobei $\varphi(x', t)$ wiederum eine Lösung der freien Schrödinger-Gleichung ist, und bestimme λ derart, dass $\psi(x, t)$ eine Lösung von (10) ist.