Universität Bonn
Physikalisches Institut
Prof. Dr. Hans Kroha, Tim Lappe

18.07.2017
Sommersemester 2017
http://www.kroha.uni-bonn.de

Theoretische Physik III – Quantenmechanik
Übungsblatt 12

(Abgabe: 25.07.2017, Besprechung: 27./28.07.2017)

–Hausaufgaben–

H 12.1 Anregung durch Stoß mit einem schweren geladenen Teilchen — 15 Punkte

Die Bewegung $\mathbf{R}(t)$ eines schweren geladenen Teilchens (Ladung Z) ist quasiklassisch: das Teilchen bewegt sich gleichförmig mit der Geschwindigkeit v, d. h. $\mathbf{R}(t) = (vt, b, 0)^T$ (Abb. 1). Das Potential für die Wechselwirkung zwischen einem Elektron eines Wasserstoffatoms (mit Kern im Ursprung) und dem Teilchen lautet:

$$\tilde{V}(t) = -\frac{Ze^2}{|\mathbf{R}(t) - \mathbf{r}|}, \tag{1}$$

wobei $\mathbf{r}$ der Ort des Elektrons ist. Falls der Stoßparameter b im Vergleich zum Atomdurchmesser groß ist, gilt $\mathbf{R}(t) \gg \mathbf{r}$.

a) Entwickle das Potential bis zur ersten Ordnung in $\mathbf{r}$ und zeige

$$\tilde{V}(t) = -\frac{Ze^2}{|\mathbf{R}(t)|}\left(1 + \frac{vt \cdot x + b \cdot y}{|\mathbf{R}(t)|^2}\right). \tag{2}$$

Der erste, nicht von $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$ abhängige Term ändert lediglich die Phase der Wellenfunktion. Wir betrachten daher im Folgenden nur den zweiten Term als Störung.

b) Zeige, dass die Übergangswahrscheinlichkeit für den Übergang vom Zustand $|i\rangle$ in den Zustand $|f\rangle$ des Atoms in erster Ordnung zeitabhängiger Störungstheorie wie folgt lautet:

$$P_{j\leftarrow i} = \left|\frac{\mathrm{i}}{\hbar} Ze^2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\, e^{\mathrm{i}\omega t}\, \frac{vt\,\langle f|\, x\,|i\rangle + b\,\langle f|\, y\,|i\rangle}{(\sqrt{(vt)^2 + b^2})^3}\right|^2, \tag{3}$$

mit $\hbar\omega = E_f - E_i$.

c) Die typische Stoßdauer ist $t_b = b/v$. Betrachte lange Stoßdauern $t_b \gg 1/|\omega|$. Warum ist der Stoß dann adiabatisch? Zeige, dass in diesem Fall $P_{j\leftarrow i} \approx 0$ gilt.

d) Für kurze Stoßdauern $t_b \ll 1/|\omega|$ kann das Integral berechnet werden. Zeige, dass in diesem Fall

$$P_{j\leftarrow i} = \left(\frac{2Ze^2}{\hbar b v}\right)^2 |\langle f|\, y\,|i\rangle|^2\,. \tag{4}$$

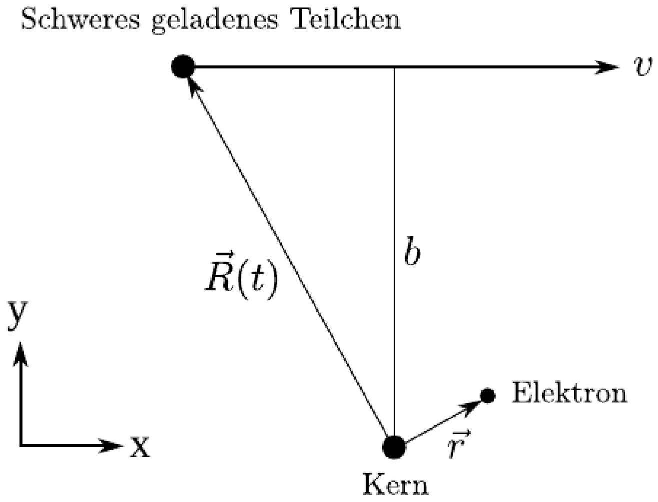

Abbildung 1: Stoß eines schweren geladenen Teilchens mit einem Wasserstoffatom

H 12.2 Absorption und stimulierte Emission **15 Punkte**

Befindet sich ein Atom nicht im Grundzustand, so zeigt das Experiment, dass es durch Abstrahlung von Licht in diesen übergeht. Das kann auf zwei Wegen geschehen: einmal durch sog. *spontane Emission* , wobei das Atom ohne äußere Einwirkung in einen niedrigeren Zustand übergeht. Zweitens gibt es den Prozess der *stimulierten Emission* , wobei das Atom durch die Gegenwart eines Photons, dessen Frequenz zur Energiedifferenz passt, zur Abgabe eines weiteren Photons gebracht wird. Dieser Prozess kann zu einem gewissen Grad durch die zeitabhängige Störungstheorie beshrieben werden. Für die Beschreibung des elektromagnetishen Feldes wählen wir die Coulomb-Eichung $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} = 0$. Im Vakuum gilt dann $\phi = 0$ sowie $\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$. Für das Vektorpotential nehmen wir $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{A}_+(\boldsymbol{r}, t) + \boldsymbol{A}_-(\boldsymbol{r}, t)$ mit

$$\boldsymbol{A}_+(\boldsymbol{r}, t) = \frac{c\sqrt{\hbar}}{2\pi} \sum_{\lambda=1}^{2} \int d^3k \frac{1}{\sqrt{\omega_{\boldsymbol{k}}}} \hat{e}(\boldsymbol{k}, \lambda) g_\lambda(\boldsymbol{k}) e^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega_{\boldsymbol{k}} t)}, \qquad \omega_{\boldsymbol{k}} = c|\boldsymbol{k}|$$

an, wobei $\boldsymbol{A}_- = (\boldsymbol{A}_+)^*$, damit $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$ reell ist. $\hat{e}(\boldsymbol{k}, \lambda)$ sind die Polarisationsvektoren, die in Coulomb-Eichung senkrecht zu $\boldsymbol{k}$ stehen. $g_\lambda(\boldsymbol{k})$ ist die Wellenzahlverteilung. Die Wechselwirkung mit dem elektromagnetischen Feld lautet (in Coulomb-Eichung)

$$V(t) = \frac{-q}{mc} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) \cdot \boldsymbol{p} + \frac{q^2}{2mc^2} |\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)|^2 + q\phi(\boldsymbol{r}, t),$$

Der quadratische Term entspricht Zwei-Photon-Prozessen (Quadrupol-Übergänge), die aber vernachlässigbar sind, falls die Licht-Feldstärke nicht sehr groß ist. Daher lautet die Wechselwirkung in unserem Fall $V(t) = (-q/mc)\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) \cdot \boldsymbol{p}$.

In der Vorlesung wurde die Goldene Regel hergeleitet. Für eine periodische Störung $V(t) = V^- e^{-\mathrm{i}\omega t} + V^+ e^{\mathrm{i}\omega t}$ lautet die Übergangsrate vom Zustand $|i\rangle$ in den Zustand $|f\rangle$:

$$R_{f\leftarrow i} = \frac{2\pi}{\hbar}\left(\delta(E_f - E_i - \hbar\omega)\left|\langle f|V^-|i\rangle\right|^2 + \delta(E_f - E_i + \hbar\omega)\left|\langle f|V^+|i\rangle\right|^2\right).$$

Im Folgenden wollen wir uns auf die Wechselwirkung mit monochromatischem Licht (Laser) konzentrieren. $g_\lambda(\boldsymbol{k})$ sei daher scharf konzentriert und gemäß $\int d^3k|g_\lambda(\boldsymbol{k})|^2 = |A_\lambda|^2$ normiert, was die Amplitude und damit die Intensität des Lasers offen lässt. Wir betrachten zunächst die stimulierte Emission eines Photons mit Wellenzahl $\boldsymbol{k}_0$ und Polarisation λ durch ein Atom, welches dabei vom Zustand $|i\rangle$ in den Zustand $|f\rangle$ übergeht.

a) Folgere aus der Goldenen Regel:

$$R_{f\leftarrow i} = \frac{|A_\lambda|^2}{2\pi|\boldsymbol{k}_0|c}\delta(E_f - E_i + \hbar\omega)\left|\langle f|\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\cdot\hat{e}(\boldsymbol{k}_0,\lambda)^* e^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{r}}|i\rangle\right|^2,$$

wobei die Stromdichte $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{m}\boldsymbol{p}$ ist.

b) Die in a) berechnete Übergangsrate hängt von der Wellenzahl der abgestrahlten Photonen $\boldsymbol{k}_0$ ab. Separiere Betrag und Richtung $\boldsymbol{k}_0 = k_0\hat{e}(\theta,\phi)$ und berechne die in den Raumwinkel $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ abgestrahlte Leistung

$$\frac{dW_{f\leftarrow i}}{d\Omega} = \frac{|A_\lambda|^2\omega_{\tilde{\boldsymbol{k}}_0}^2}{2\pi c^3}\left|\langle f|\boldsymbol{j}(\boldsymbol{k}_0)\cdot\hat{e}(\boldsymbol{k}_0,\lambda)^*|i\rangle\right|^2_{\boldsymbol{k}_0=\tilde{\boldsymbol{k}}_0\hat{e}(\theta,\phi)}$$

wobei $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{k}_0) = \boldsymbol{j}e^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{r}}$ und $\tilde{\boldsymbol{k}}_0 = \frac{E_i - E_f}{\hbar c}$.

c) Was ändert sich, wenn man Absorption betrachtet?

d) Zeige, dass für atomare Übergänge schon bei Abständen in der Größenordnung des Bohr-Radius $|\boldsymbol{r}| \approx a_0 = \frac{\hbar}{me^2}$ die Abschätzung $\boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{r} \ll 1$ gilt. Die in $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{k}_0)$ auftretende Exponentialreihe kann daher abgebrochen werden (Langwellennäherung).

e) Zeige, dass für den ersten Term der Reihe (die elektrische Dipolstrahlung) gilt:

$$\frac{dW_{f\leftarrow i}}{d\Omega} = \frac{|A_\lambda|^2 q^2\omega_{\tilde{\boldsymbol{k}}_0}^4}{2\pi c^3}|\boldsymbol{d}_{fi}\cdot\hat{e}(\hat{k}_0,\lambda)^*|^2_{\boldsymbol{k}_0=\tilde{\boldsymbol{k}}_0\hat{e}(\theta,\phi)},$$

wobei $\boldsymbol{d}_{fi} = \langle f|\boldsymbol{r}|i\rangle$ das sogenannte *Dipolmatrixelement* ist.

H 12.3 Auswahlregeln für Dipolübergänge **10 Punkte**

In Aufgabe 12.2 wurde gezeigt, dass die Übergangswahrscheinlichkeit zwischen zwei Zuständen $|i\rangle$ und $|f\rangle$ eines Atoms, welches sich in einem schwachen, zeitlich periodischen elektromagnetischen Feld befindet, in Langwellennäherung proportional zum sogenannten *Dipolmatrixelement*

$$\mathbf{d}_{fi} = \langle f|\hat{\mathbf{r}}|i\rangle$$

ist. Verschwindet das Dipolmatrixelement, sind nur stark unterdrückte Übergänge höherer Ordnung möglich. Man spricht daher von *Auswahlregeln* für die Übergänge zwischen zwei Zuständen. Diese spielen in der Atomphysik eine wichtige Rolle. Im Folgenden wollen wir uns die Auswahlregeln für das Wasserstoffatom mit Eigenzuständen $|nlm\rangle$ zu $\hat{H}$, $\hat{L}^2$, $\hat{L}_z$ anschauen.

$$\mathbf{d}_{n'l'm',nlm} = \langle n'l'm'|\hat{\mathbf{r}}|nlm\rangle \tag{5}$$

a) Zeige, dass das Dipolmatrixelement

$$\mathbf{d}_{n'l'm',\,nlm} = \langle n'l'm'|\hat{\mathbf{r}}|nlm\rangle \tag{6}$$

nur dann nicht verschwindet, wenn eine der Auswahlregeln

$$m' = \begin{cases} m, \\ m \pm 1 \end{cases} \tag{7}$$

erfüllt ist.

Hinweis: Betrachte die Matrixelemente von $[\hat{L}_z, \hat{z}]$ und $[\hat{L}_z, \hat{x} \pm \mathrm{i}\hat{y}] \mp (\hat{x} \pm \mathrm{i}\hat{y})/\hbar$.

b) Zeige, dass das Dipolmatrixelement Gl. (8) nur dann nicht verschwindet, wenn die Auswahlregel

$$l' = l \pm 1 \tag{8}$$

erfüllt ist.

Hinweis: Betrachte die Matrixelemente von $[\hat{L}^2, [\hat{L}^2, \hat{\mathbf{r}}]] = 2\hbar^2(\hat{\mathbf{r}}\hat{L}^2 + \hat{L}^2\hat{\mathbf{r}})$ und zeige

$$\langle n'l'm'|\hat{\mathbf{r}}|nlm\rangle\,(l + l')(l + l' + 2)[(l - l')^2 - 1] = 0.$$

Benutze außerdem den Paritätsoperator, um zu zeigen, dass $\langle l = 0|\hat{\mathbf{r}}|l = 0\rangle = 0$ gilt.