Universität Bonn
Physikalisches Institut
Prof. Dr. Hans Kroha, Tim Lappe

04.07.2017
Sommersemester 2017
http://www.kroha.uni-bonn.de

Theoretische Physik III – Quantenmechanik
Übungsblatt 10

(Abgabe: 11.07.2017, Besprechung: 13./14.07.2017)

–Hausaufgaben–

H 10.1 Kramers-Entartung — 10 Punkte

In der Vorlesung wurde bereits die Zeitumkehrabbildung für eine skalare Wellenfunktion eingeführt. Wir wollen dies hier für ein Teilchen mit Spin 1/2 diskutieren. Betrachte den Hamilton-Operator

$$\widehat{H} = \frac{1}{2m}\hat{\mathbf{p}}^2 + V(\hat{\mathbf{r}}) + W(\hat{\mathbf{r}})\,\widehat{\mathbf{L}}\cdot\widehat{\mathbf{S}}$$

für ein Spin-1/2-Teilchen, d. h., das Teilchen befindet sich in einem Potential $V(\hat{\mathbf{r}})$ mit einer zusätzlichen Wechselwirkung zwischen Bahndrehimpuls und Spin (Spin-Bahn-Kopplung), wobei $W(\hat{\mathbf{r}})$ reell ist.

a) Zeige, dass in der Standarddarstellung der Pauli-Matrizen $\sigma_k^* = -\sigma_y\sigma_k\sigma_y$ gilt.

b) Zeige, dass $\sigma_y\widehat{H}^* = \widehat{H}\sigma_y$. Folgere daraus: wenn $\psi(t)$ eine Lösung der Schrödinger-Gleichung ist, so ist $\phi(t) = \sigma_y\psi^*(-t)$ ebenfalls eine Lösung.

c) Zeige, dass die Abbildung $\widehat{T} : \psi \mapsto \Psi = \sigma_y\psi^*$ antilinear und antiunitär ist, d. h., $\langle\Psi_1|\Psi_2\rangle = \langle\psi_2|\psi_1\rangle$. Zeige $\widehat{T}^2 = -\mathbb{1}$. Welche Eigenschaften der Zeitumkehrabbildung $\psi(t) \mapsto \sigma_y\psi^*(-t)$ folgen daraus?

d) Sei ψ_E eine Lösung der stationären Schrödinger-Gleichung zur Energie E. Zeige, dass $\phi_E = \sigma_y\psi_E^*$ Lösung zur gleichen Energie ist und dass $\langle\psi_E|\phi_E\rangle = 0$.

10.2 Hantelmolekül — 10 Punkte

Ein starres Hantelmolekül rotiere im Raum um den Koordinatenursprung mit zwei Freiheitsgraden, den Polarwinkeln ϑ und φ entsprechend. Es werde durch den Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{1}{2I}\widehat{\mathbf{L}}^2$$

mit dem Trägheitsmoment I beschrieben.

a) Gib die Eigenwerte und Eigenfunktionen sowie deren Entartungsgrade an.

b) Zu einem bestimmten Zeitpunkt befinde sich der Rotator im Zustand

$$\langle \theta, \varphi | \Phi \rangle = \Phi(\vartheta, \varphi) = \alpha(\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta \cos 2\varphi),$$

mit einer Normierungskonstanten α. Mit welcher Wahrscheinlichkeit liefert eine Messung von $\mathbf{L}^2$ die Werte $6\hbar^2,\ 2\hbar^2,\ 0$?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ergibt die gleichzeitige Messung von $\mathbf{L}^2$ und L_z das Wertepaar $(6\hbar^2, -2\hbar)$?

Hinweis: $Y_{00}(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_{20}(\vartheta, \varphi)\sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3\cos^2\varphi - 1), \quad Y_{2\pm2}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\vartheta e^{\pm i2\varphi}$

10.3 Bahndrehimpuls — 10 Punkte

Der Bahndrehimpulsoperator wurde definiert als

$$\widehat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{p}}, \quad \text{d.h.} \quad \widehat{L}_i = \epsilon_{ijk}\hat{x}_j\hat{p}_k.$$

Zeige, dass für eine quadratintegrierbare Funktion Ψ folgende Beziehung gilt:

$$\widehat{\mathbf{L}}^2\Psi(\mathbf{x}) = -\hbar^2(|\mathbf{x}|\nabla^2 - \mathbf{x}\cdot\nabla - (\mathbf{x}\cdot\nabla)^2)\Psi(\mathbf{x}).$$

Ferner betrachte Kugelkoordinaten und folgere, dass der *Laplace-Operator* sich wie folgt schreiben lässt:

$$-\hbar^2\nabla^2\Psi = -\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\Psi + \frac{\widehat{\mathbf{L}}^2}{r^2}\Psi.$$

10.4 Spin-1/2, $SU(2)$ und $SO(3)$ — 10 Punkte

In der Vorlesung wurden die Darstellungen der Drehimpulsalgebra zum Spin-$\frac{1}{2}$ betrachtet. Dabei wurde man auf die Gruppe SU(2) geführt, welche dieselbe Lie-Algebra wie $SO(3)$ besitzt. In dieser Aufgabe werden wir uns mit der physikalischen Bedeutung dieser Aussage auseinandersetzen.

a) Dafür betrachte zunächst den allgemeinen Rotationsoperator $U(\boldsymbol{\alpha}) = \exp(-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\sigma}/2)$ in der Basis $|\frac{1}{2}, m\rangle$, wobei $\boldsymbol{\alpha}$ die Drehachse bezeichnet und $\boldsymbol{\sigma}$ einen Vektor mit den Pauli-Matrizen $\{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$ als Komponenten. Zeige, dass

$$U(\boldsymbol{\alpha}) = \cos\left(\frac{|\boldsymbol{\alpha}|}{2}\mathbb{1}\right) - i\sin\left(\frac{|\boldsymbol{\alpha}|}{2}\right)\frac{\boldsymbol{\alpha}}{|\boldsymbol{\alpha}|}\cdot\boldsymbol{\sigma}.$$

b) Die Transformation der Pauli-Matrizen bzgl. $U(\boldsymbol{\alpha})$ ist gegeben durch $\boldsymbol{\sigma'} \to U(\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\sigma}U^\dagger(\boldsymbol{\alpha})$. Die Rotation eines 3-dimensionalen Vektors $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$ um die Drehachse $\boldsymbol{\alpha}$ ist gegeben durch

$$\mathbf{x}' \to R(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{x} = \mathbf{x}\cos(|\boldsymbol{\alpha}|) + \frac{\boldsymbol{\alpha}}{|\boldsymbol{\alpha}|}\left(\mathbf{x}\cdot\frac{\boldsymbol{\alpha}}{|\boldsymbol{\alpha}|}\right)(1-\cos(|\boldsymbol{\alpha}|)) + \left(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{|\boldsymbol{\alpha}|}\times\mathbf{x}\right)\sin(|\boldsymbol{\alpha}|).$$

Zeige, dass die Transformation von $\boldsymbol{\sigma}$ bzgl. $U(\boldsymbol{\alpha})$ identisch zu einer Rotation um die Achse $\boldsymbol{\alpha}$ des Vektors $\boldsymbol{\sigma}$ in einem 3-dimensionalen Raum ist.

c) Zeige, dass die Transformationen $U(\boldsymbol{\alpha})$ und $-U(\boldsymbol{\alpha})$ aus $SU(2)$ derselben Rotation $R(\boldsymbol{\alpha}) \in SO(3)$ entsprechen. Um welchen Winkel muss man einen Spinor rotieren, damit man einen Vorzeichenwechsel erhält?