Universität Bonn
Physikalisches Institut
Prof. Dr. Hans Kroha, Tim Lappe

25.04.2017
Sommersemester 2017
http://www.kroha.uni-bonn.de

# Theoretische Physik III – Quantenmechanik
# Übungsblatt 1

(Abgabe: 02.05.2017, Besprechung: 05./06.05.2017)

–Hausaufgaben–

## H 1.1 Fourier-Transformation — 10 Punkte

Die *Fourier-Transformation* (FT) einer Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ ist definiert durch

$$\mathcal{F}\{\varphi\}(\mathbf{k}) = (2\pi)^{-n/2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^n x \; \varphi(\mathbf{x}) e^{-i\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \tag{1}$$

Zur Unterscheidung von Funktion und Fourier-Transformierter schreibt man vereinfachend auch $\mathbf{k}$ statt $\mathbf{x}$ als Argument und lässt das Symbol $\mathcal{F}$ weg, also $\mathcal{F}\{\varphi\}(\mathbf{k}) = \varphi(\mathbf{k})$.
Wir nehmen an, dass $\varphi(\mathbf{x})$ genügend oft differenzierbar ist und im Unendlichen genügend schnell verschwindet, so dass das Integral und alle Operationen damit wohldefiniert sind.
Die *Faltung* (engl. *convolution*) zweier Funktionen $\varphi_1$ und $\varphi_2$ ist definiert als

$$(\varphi_1 * \varphi_2)(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^n y \; \varphi_1(\mathbf{x}-\mathbf{y})\varphi_2(\mathbf{y}). \tag{2}$$

a) Zeige dass die FT einen Ableitungsoperator auf eine Multiplikation abbildet und umgekehrt, d.h.

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\varphi(\mathbf{x})\right\}(\mathbf{k}) = ik_\alpha\varphi(\mathbf{k}) \quad \text{und} \quad \mathcal{F}\left\{x_\alpha\varphi(\mathbf{x})\right\}(\mathbf{k}) = i\frac{\partial}{\partial k_\alpha}\varphi(\mathbf{k}). \tag{3}$$

b) **Faltungstheorem**. Zeige für $n = 1$, dass die FT ein Produkt im Ortsraum in eine Faltung im $k$-Raum überführt,

$$\sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}\{\varphi_1\cdot\varphi_2\}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; \varphi_1(x)\varphi_2(x)e^{-ikx} = \left(\mathcal{F}\{\varphi_1\} * \mathcal{F}\{\varphi_2\}\right)(k), \tag{4}$$

und dass dies auch umgekehrt für die Transformation eines Produkts im $k$-Raum in den Ortsraum gilt.

c) Zeige dass die Ableitung in einen der beiden Faktoren der Faltung gezogen werden kann,

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[(\varphi_1 * \varphi_2)(\mathbf{x})\right] = \left(\left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\varphi_1\right] * \varphi_2\right)(\mathbf{x}) = \left(\varphi_1 * \left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\varphi_2\right]\right)(\mathbf{x}). \tag{5}$$

d) Beweise die Parseval'sche Identität,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; |\varphi(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \; |\varphi(k)|^2. \tag{6}$$

## H 1.2 Eigenschaften Gauß'scher Funktionen — 10 Punkte

In dieser Aufgabe wollen wir als Vorbereitung einige Eigenschaften von Gauß'schen Funktionen anschauen. Eine solche sei gegeben durch

$$g(x) = \frac{1}{N} e^{-(x-x_0)^2/2\sigma^2}. \tag{7}$$

wobei $\sigma^2$ die Varianz und $\Delta x := \sigma$ die Standardabweichung sind.

a) Berechne zunächst die Normierungskonstante

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; e^{-(x-x_0)^2/2\sigma^2}. \tag{8}$$

*Tipp: Hier gibt es einen altbekannten Trick, bei dem man das Integral zunächst als ein zweidimensionales Integral schreibt und dann in Polarkoordinaten darstellt.*

b) Berechne die FT mittels quadratischer Ergänzung als

$$g(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; e^{-ikx} g(x). \tag{9}$$

c) Betrachte jetzt $|g(x)|^2$ und $|g(k)|^2$. Was gilt für das Produkt aus den Standardabweichungen dieser Funktionen, $\Delta x$ und $\Delta k$?

## H 1.3 Schwarz-Ungleichung — 10 Punkte

Sei $V$ ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$. Eine Abbildung

$$\|.\| : \; V \to \mathbb{R}, \tag{10}$$

$$|v\rangle \mapsto \|v\| \tag{11}$$

heißt *Norm* auf $V$, falls $\forall \; |v\rangle, |w\rangle \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

1. $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$.
2. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (Dreiecksungleichung).
3. $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$.

Das Paar $(V, \|.\|)$ heißt *normierter Vektorraum.*
Sei $\langle . | . \rangle$ ein *Skalarprodukt* auf $V$.

a) Zeige, dass das Skalarprodukt mit der Definition

$$\|v\| := \sqrt{\langle v|v\rangle}, \tag{12}$$

eine Norm auf $V$ induziert, d.h. dass diese Definition die drei Bedingungen einer Norm (siehe oben) erfüllt.

b) Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung besagt für $v, w \in V$, dass

$$|\langle v|w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|. \tag{13}$$

Beweise die Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

**H 1.4 Compton-Effekt** **10 Punkte**

Der Compton-Effekt beschreibt die Streuung von elektromagnetischer Strahlung an Elektronen. Dabei beobachtet man, dass die Strahlung Energie auf die Elektronen überträgt und sich ihre Wellenlänge ändert. Man misst, dass diese Verschiebung der Wellenlänge vom Streuwinkel abhängt. Die Änderung der Wellenlänge lässt sich im klassischen Wellenbild nicht erklären (warum?).

Wir betrachten nun den Compton-Effekt als elastischen Stoß[1] zwischen einem Photon und einem Elektron (welches wir durch die Wahl des Bezugssystems als ruhend annehmen können). Bei dem Stoß müssen Energie- und Impulserhaltung gelten, wobei wir wegen der i.A. hohen Energie des Photons relativistisch rechnen müssen. Der Impuls des Elektrons ist also $\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$, mit $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Seine Energie ist $E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}$. Das Photon soll als masseloses Teilchen angenommen werden, d. h. $E = c\,|\mathbf{p}| = \hbar\omega$.

a) Zeige die Formel $E = \gamma mc^2$ für das Elektron.

b) Stelle die Energie- und Impulsbilanz auf.

c) Folgere aus a) für die Wellenlängenänderung des Photons beim Stoß

$$|\Delta\lambda| = \frac{h}{mc}\,(1 - \cos\vartheta)\,, \tag{14}$$

wobei $\vartheta$ der *Streuwinkel* zwischen einfallendem und gestreutem Photon und $\lambda_{\text{Compton}} = \frac{h}{mc}$ die *Compton-Wellenlänge* ist.

d) Warum kann man den Effekt bei sichtbarem Licht so gut wie nicht beobachten?

[1]Ein *Stoß* wird als *elastisch* bezeichnet, wenn die kinetische Energie erhalten ist. In der Beschleunigerphysik spricht man dagegen von *inelasticher* Streuung, wenn das *einfallende* Teilchen seine Energie ändert.