Universität Bonn
Physikalisches Institut
Prof. Dr. Hans Kroha, Tim Lappe

16.06.2017
Sommersemester 2017
http://www.kroha.uni-bonn.de

Theoretische Physik III – Quantenmechanik
Anwesenheitsübungen 7

A 7.1 Propagator und Pfadintegral

Der Propagator $U(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')$ ist nichts anderes als die Matrixelemente des Zeitentwicklungsoperators $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H(t-t')/\hbar}$ mit Ortseigenzuständen,

$$U(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \langle \mathbf{r} | \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}H(t-t')/\hbar} \, | \mathbf{r}' \rangle \, . \tag{1}$$

Die Wellenfunktion propagiert dann wie folgt (d. h. man kennt ψ an allen Orten zu einer früheren Zeit und will daraus auf eine spätere Zeit schließen):

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \int \mathrm{d}^3 r' \, U(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') \psi(\mathbf{r}', t'). \tag{2}$$

Feynman zeigte, dass man den Propagator als Pfadintegral schreiben kann,

$$U(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \int \mathcal{D}\{\mathbf{x}\} \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}S\{\mathbf{x}\}/\hbar}, \tag{3}$$

wobei die Integration $\mathcal{D}\{\mathbf{x}\}$ über alle Pfade $\mathbf{x}$ mit Endpunkt $\mathbf{x}(t) = \mathbf{r}$ und Anfangspunkt $\mathbf{x}(t') = \mathbf{r}'$ läuft und S die Lagrange'sche Wirkung dieser Bahn ist.

a) Warum gilt die "Anfangsbedingung" $\lim_{\varepsilon \to 0} U(\mathbf{r}, t+\varepsilon; \mathbf{r}', t) = \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$? Zeige diese Eigenschaft explizit am Propagator für das eindimensionale, freie Teilchen,

$$U(x, t; x', t') = \sqrt{\frac{m}{2\pi \mathrm{i}\hbar(t-t')}} \exp\left\{ \frac{\mathrm{i}m}{2\hbar(t-t')} \left(x - x'\right)^2 \right\}. \tag{4}$$

b) Argumentiere, warum der freie Propagator in n Dimensionen lautet:

$$U(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = \left(\frac{m}{2\pi \mathrm{i}\hbar(t-t')} \right)^{n/2} \exp\left\{ \frac{\mathrm{i}m}{2\hbar(t-t')} \left| \mathbf{x} - \mathbf{x}' \right|^2 \right\}. \tag{5}$$