Universität Bonn
Physikalisches Institut
Prof. Dr. Hans Kroha, Tim Lappe

11./12.05.2017
Sommersemester 2017
`http://www.kroha.uni-bonn.de`

Theoretische Physik III – Quantenmechanik
Anwesenheitsübungen 3

A 3.1 Quantenmechanik - Grundlagen

a) Warum müssen die zu physikalischen Observablen gehörenden Operatoren hermitesch sein?

b) Die Wellenfunktion $\psi(\mathbf{x}, t)$ eines Teilchens im abstrakten Zustand $|\psi(t)\rangle$ ist die Darstellung von $|\psi(t)\rangle$ in der Ortseigenbasis $\{|\mathbf{x}\rangle \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\}$. Wie lautet die Entwicklung von $|\psi(t)\rangle$ nach Ortseigenzuständen $|\mathbf{x}\rangle$, und wie hängt diese mit der Wellenfunktion $\psi(\mathbf{x}, t)$ zusammen?

c) Wie wirken die Operatoren $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ für die Komponenten des Ortes $\mathbf{x} = (x, y, z)^T$ auf den Ortseigenzustand $|\mathbf{x}\rangle$?

d) Eine Observable $\Omega(x)$ sei nur vom Ort x abhängig. Wir nehmen an, dass die Taylor-Entwicklung für diese Observable existiert

$$\Omega(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left.\frac{\partial^n \Omega}{\partial x^n}\right|_{x=0} x^n \ .$$

(i) Wie wirkt der zugehörige Operator $\widehat{\Omega} = \Omega(\widehat{x})$ auf einen Ortseigenzustand $|x\rangle$?

(ii) Was lässt sich daraus allgemein für Operatoren $\widehat{B}$, die Funktionen anderer Operatoren $\widehat{A}$ sind ($\widehat{B} = B(\widehat{A})$) und deren Wirkung auf die Eigenzustände von $\widehat{A}$ sagen?

e) In einem Experiment wird eine bestimmte Observable $\widehat{\Omega}$ gemessen. Die Eigenzustände dieses Operators werden mit $|\omega_i\rangle$ bezeichnet: $\widehat{\Omega}\,|\omega_i\rangle = \omega_i\,|\omega_i\rangle$. Während des Messprozesses wird ein allgemeiner Zustand $|\psi\rangle = \sum_k |\omega_k\rangle \langle\omega_k|\psi\rangle$ auf den Eigenzustand $|\omega_j\rangle$ projiziert.

(i) Gib den zugehörigen Projektor auf den Zustand $|\omega_j\rangle$ und seine Wirkung auf $|\psi\rangle$ an.

(ii) Gib die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass sich das System nach der Messung im Zustand $|\omega_j\rangle$ befindet. Kannst du prinzipiell eine Aussage machen, dass sich das System vor der Messung in einem der Eigenzustände $|\omega_i\rangle$ befindet?

f) In der Vorlesung wurde die Ungleichung

$$4(\Delta\Omega)^2(\Delta\Lambda)^2 \geq \left|\langle\psi|\,\{\Delta\widehat{\Omega}, \Delta\widehat{\Lambda}\}\,|\psi\rangle\right|^2 + \left|\langle\psi|\,[\Delta\widehat{\Omega}, \Delta\widehat{\Lambda}]\,|\psi\rangle\right|^2$$

gezeigt. Setze nun $\widehat{\Omega} = \hat{x}$ und $\widehat{\Lambda} = \hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$, und zeige, dass für ein Gauß'sches Wellenpaket der erste Term auf der rechten Seite gleich null ist.