Universität Bonn
Physikalisches Institut
Prof. Dr. Hans Kroha, Tim Lappe

04./05.05.2017
Sommersemester 2017
http://www.kroha.uni-bonn.de

Theoretische Physik III – Quantenmechanik
Anwesenheitsübungen 2

A 2.1 Skalarprodukt und hermitesche Konjugation

Sei V ein Vektorraum mit dem Skalarprodukt $\langle v | w\rangle$, $|v\rangle, |w\rangle \in V$, und $\mathbb{B} = \{|n\rangle \,|\, n = 1, \ldots, N\}$ eine Basis von V.

a) Wie lautet das Skalarprodukt in der Koordinatendarstellung bezüglich $\mathbb{B}$, d.h. ausgedrückt durch die Koeffizienten v_n, w_n der Vektoren $|v\rangle, |w\rangle$?

b) Sei $\mathcal{A}$ ein linearer Operator auf V: $\mathcal{A}|v\rangle = |w\rangle \in V$. Wie wirkt $\mathcal{A}$ in dem zu V dualen Vektorraum V^*? Betrachte hierzu das Skalarprodukt $\langle u| \mathcal{A} |v\rangle$ in der Koordinatendarstellung.

c) Sei nun $\mathbb{B}$ eine Orthonormalbasis. Zeige, dass die Matrixelemente von $\mathcal{A}$ in dieser Basis, d.h. die Elemente der Matrix $A = (a_{nm})$, die folgende Form haben:

$$a_{nm} = \langle n| \mathcal{A} |m\rangle . \tag{1}$$

A 2.2 Eigenwerte von Matrizen

Ein Operator $\mathcal{H}$ auf einem zweidimensionalen Vektorraum werde in einer gewissen Basis durch die folgende Matrix dargestellt:

$$H = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & V \\ V^* & \varepsilon_2 \end{pmatrix} , \qquad \text{wobei } \varepsilon_1,\, \varepsilon_2 \in \mathbb{R} \text{ und } V \in \mathbb{C}. \tag{2}$$

a) Diagonalisiere die Matrix, d.h. bestimme ihre Eigenwerte E_1, E_2 und die zugehörigen Eigenvektoren.

b) Skizziere die Eigenwerte für konstante ε_1, ε_2 und $V \in \mathbb{R}$ als Funktion von V. Wie verhält sich die Differenz $\Delta E = E_2 - E_1$ für $V \to 0$ und für $V \to \infty$?

A 2.3 Fourier-Transformation

a) Gib die Definition der Fourier-Transformation vom Ortsraum in den Impulsraum und die entsprechende Rücktransformation vom Impulsraum in den Ortsraum an.

b) Drücke die Delta-Funktion $\delta(x - x')$ durch ebene Wellen aus.

c) Zeige, dass die Fourier-Transformation auf L^2 ein unitärer Operator ist (also invertierbar und das Skalarprodukt erhaltend).

d) Berechne die Fourier-Transformationen von $\varphi(x) = \cos(k_0 x)$ und $\phi(x) = \sin(k_0 x)$.