Universität Bonn
Physikalisches Institut
Prof. Dr. Hans Kroha, Tim Lappe

27./28.04.2017
Sommersemester 2017
http://www.kroha.uni-bonn.de

Theoretische Physik III – Quantenmechanik
Anwesenheitsübungen 1

A 1.1 Grundlagen

a) Wie lautet die Schrödinger-Gleichung eines Teilchens in einem Potential V?

b) Was besagt das Superpositionsprinzip? Wie drückt es sich in der Schrödinger-Gleichung aus?

c) Wie lauten der Energie- und der Impulsoperator?

d) Wie bekommt man die Aufenthaltswahrscheinlichkeit aus der Wellenfunktion?

A 1.2 Lineare Algebra

a) Wann ist eine Abbildung hermitesch? (Eine hermitesche Abbildung wird auch als *selbstadjungiert* (engl. *self-adjoint*) bezeichnet.)

b) Wann ist eine Abbildung unitär?

c) Zeige, dass die Eigenwerte einer unitären Abbildung auf dem Einheitskreis in $\mathbb{C}$ liegen.

d) Zeige, dass die Eigenvektoren einer unitären Abbildung orthogonal sind.

e) Zeige: ist H hermitesch, so ist e^{iH} unitär.

f) Zeige, dass die Eigenwerte einer hermiteschen Abbildung in $\mathbb{R}$ liegen.

g) Zeige, dass die Eigenvektoren einer hermiteschen Abbildung orthogonal sind.

h) Betrachte zwei allgemeine (nicht-hermitesche) Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Diagonalisiere A, B und gib auch die Transformationsmatrizen T, S an, wo

$$A = T\, D_A\, T^{-1}, \tag{2}$$

$$B = S\, D_B\, S^{-1}. \tag{3}$$

Berechne außerdem den Kommutator $[A,\, B] = AB - BA$.

i) Beweise: $[A, B] = 0$ genau dann, wenn $T = S$.

j) Nimm nun noch die Matrix

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

hinzu, diagonalisiere sie wiederum und berechne den Kommutator $[A, C]$. Was schließt du für den Kommutator von B und C? Man sagt, die Matrizen A und B seien *simultan diagonalisierbar*.

A 1.3 Bra und Ket

Die sogenannte Bra-Ket-Notation wurde von Paul Dirac in den 1930er Jahren in die Quantenmechanik eingeführt.[1] Ein *Bra*, $\langle v|$, ist dabei der adjungierte Vektor zu einem *Ket*, also $|v\rangle^\dagger = \langle v|$. Hat man einmal gelernt, damit umzugehen, ist diese Notation sehr praktisch und intuitiv.

Sei nun zunächst $\mathbb{B} = \{|n\rangle \mid n = 1, ..., N\}$ eine normierte Orthogonalbasis eines N-dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraums V und $\mathbb{B}^* = \{\langle n| \mid n = 1, ..., N\}$ die entsprechende duale Basis. Es gilt somit $\langle n|n'\rangle = \delta_{nn'}$ und

$$\sum_n |n\rangle\langle n| = \mathbb{1}. \tag{5}$$

a) Drücke einen beliebigen Ket-Vektor $|\psi\rangle \in V$ in der Basis $\mathbb{B}$ aus. Gib die Koeffizienten ψ_n an. Überlege, wie die Basisentwicklung durch Gl. (5) kompakt geschrieben werden kann.

b) Sei $A : V \to V$ eine hermitesche Abbildung. Drücke A und $A^\dagger$ in der obigen Basis aus.

[1] Dirac war laut Überlieferung ein wortkarger Charakter. Beim Essen im St. John College in Cambridge saß er für gewöhnlich wortlos am Tisch und beiteiligte sich nur selten an der Konversation. Als einmal einige Fellows aus anderen Fachrichtungen über Wortschöpfungen in der Wissenschaft diskutierten, warf Dirac kommentarlos folgende Bemerkung ein: “I invented the bra...”

A 1.4 Delta-Funktion

Nun betrachten wir zum unendlich-dimensionalen Hilbert-Raum der quadratintegrierbaren Funktionen. Dieser Raum wird als L^2 bezeichnet. Auf ihm ist ein komplexes Skalarprodukt folgendermaßen definiert:

$$\langle\psi|\varphi\rangle = \int \mathrm{d}x\ \psi^*(x)\,\varphi(x). \tag{6}$$

Nimm die Existenz einer Orthonormalbasis $\mathbb{B} = \{|x\rangle \mid x \in \mathbb{R}\}$ an, sodass $\langle x|x'\rangle = \delta(x-x')$ und

$$\int \mathrm{d}x\ \ |x\rangle\langle x| = \mathbb{1}, \tag{7}$$

ganz in Analogie zum endlich-dimensionalen Fall. Hier ist $\delta(x-x')$ die sogenannte *Dirac-* oder *Delta-Funktion*. Diese hat die zentrale Eigenschaft

$$\int \mathrm{d}x\ \delta(x)f(x) = f(0) \quad \forall\ f \in L^2. \tag{8}$$

c) Drücke einen beliebigen Ket-Vektor $|\psi\rangle \in L^2$ in der Basis $\mathbb{B}$ aus. Schreibe dabei $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$ (Die *Funktion* $\psi(x)$ ist nicht der Ket $|\psi\rangle$. Unterscheide also den Ket $|\psi\rangle$ und den *Koeffizienten* $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$ in der Basis $\mathbb{B}$).

d) Zeige, dass die Stammfunktion der Delta-Funktion die Heaviside-Funktion ist.

Jetzt betrachten wir die Fourier-Transformation der Basis $\mathbb{B}$:

$$|k\rangle = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi}}\ \ |x\rangle\, e^{ikx}. \tag{9}$$

e) Vergewissere dich, dass dann $\langle x|k\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}$ gelten muss.

f) Drücke $\psi(k)$ in der Basis $\mathbb{B}$ aus. In welcher Verbindung steht dies zu $\psi(x)$?

g) Betrachte die konstante Funktion $\psi(x) = 1$ und leite mit den obigen Eigenschaften einen Ausdruck für die Delta-Funktion her.